ESSEC B/L - 2013

Problème 1

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
On s'intéresse dans ce problème à des exemples de transformations du type $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ où f est une fonction de E et $\Phi(f)$ est la fonction définie par :

$$\Phi(f)(x) = \int_a^b \varphi(x-t)f(t)dt$$

avec a et b dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et φ est une fonction de E donnée.
Par commodité d'écriture, on notera aussi $\Phi(f) = F$.
La première partie recherche les fonctions propres d'une telle transformation et la seconde partie étudie une propriété de la somme de deux lois de Cauchy indépendantes.

Partie 1 - Recherche de fonctions propres

Dans cette partie, on pose, pour f dans E, $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t)dt$ et on désigne par Φ, l'application qui à f dans E associe $F = \Phi(f)$.
On note, pour k entier naturel, f_k la fonction de E définie par $f_k(t) = t^k$.

1. En développant $(x-t)^2$ dans $\displaystyle\int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t)dt$, justifier que si f est dans E, alors $F = \Phi(f)$ est dans E.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
3. Exprimer $\Phi(f_0)$, $\Phi(f_1)$ et $\Phi(f_2)$ à l'aide des fonctions f_0, f_1 et f_2.
4. Justifier que les fonctions f_0, f_1 et f_2 forment une famille libre de E.
5. Soit f une fonction propre de Φ associée à une valeur propre réelle λ non nulle, c'est-à-dire une fonction f non nulle telle que $F = \Phi(f) = \lambda f$.
   Montrer que f est de la forme $af_0 + bf_1 + cf_2$ et en déduire les valeurs propres non nulles de Φ ainsi que les fonctions propres associées.
6. Montrer que les fonctions propres de Φ associées à la valeur propre 0, c'est-à-dire les éléments du noyau de Φ, sont exactement les fonctions f non nulles telles que :

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^1 tf(t)dt = \int_{-1}^1 t^2 f(t)dt = 0.$$

   Donner un exemple d'une telle fonction propre.

Partie 2 - Somme de lois de Cauchy indépendantes

Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé.
Les variables aléatoires sont définies sur $\mathcal{E}$.
Une variable aléatoire à densité est aussi appelée variable aléatoire absolument continue.
Pour a réel strictement positif, on pose $\varphi_a(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$.

7. Justifier que φ_a est une densité d'une variable aléatoire absolument continue.
   On dit qu'une variable aléatoire réelle définie sur $\mathcal{E}$ suit une loi de Cauchy de paramètre a si elle admet comme densité la fonction φ_a.
8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre a. Déterminer la loi de λX pour λ réel strictement positif.
9. Montrer qu'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre a n'admet pas d'espérance finie.

Dans la suite de ce problème, on considère deux variables aléatoires X_a et X_b sur $\mathcal{E}$ suivant des lois de Cauchy de paramètres respectifs a et b. On suppose que ces lois sont indépendantes et on admet que $X_a + X_b$ est une variable aléatoire absolument continue dont une densité est la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(t)\varphi_b(x-t)dt$$

On se propose de caractériser la loi de $X_a + X_b$.

10. Soient x un réel et A un réel strictement positif. Calculer $\displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{t}{t^2+a^2}dt$ et $\displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{x-t}{(x-t)^2+b^2}dt$ ainsi que les limites de ces intégrales lorsque A tend vers $+\infty$.
11. Pour x et t réels, on admet que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{(t^2+a^2)((x-t)^2+b^2)} = \frac{\alpha t + \beta}{t^2+a^2} + \frac{\gamma(x-t)+\delta}{(x-t)^2+b^2}$$

avec $\boxed{\beta = \dfrac{x^2+b^2-a^2}{(x^2+(a+b)^2)(x^2+(a-b)^2)}}$ et $\boxed{\gamma = \dfrac{x^2+a^2-b^2}{(x^2+(a+b)^2)(x^2+(a-b)^2)}}$.

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(t)\varphi_b(x-t)dt$ et en déduire la loi de $X_a + X_b$.

Problème 2

On désigne par $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Les variables aléatoires utilisées dans ce problème sont toutes définies sur $\mathcal{E}$.
On rappelle que si X est une variable aléatoire suivant une loi normale et si a et b sont des réels avec $a > 0$, alors $aX + b$ suit une loi normale.

Partie 1 - Lois infiniment divisibles

Une variable aléatoire définie sur $\mathcal{E}$ est dite **infiniment divisible** si pour tout entier supérieur ou égal à 1, il existe des variables aléatoires $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi, telles que $\boxed{X \text{ suive la même loi que } X_{1,n} + X_{2,n} + \cdots + X_{n,n} = \sum_{k=1}^{n} X_{k,n}}$.

12. On rappelle que si n est un entier supérieur ou égal à 2 et si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (notée $\mathcal{P}(\lambda)$), alors la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi de Poisson.
    Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?
13. En déduire qu'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson est infiniment divisible.
14. On rappelle que si n est un entier supérieur ou égal à 2 et si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 (notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) avec μ l'espérance de la variable et σ^2 sa variance), alors la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi normale.
    Quels sont les paramètres de cette loi normale ?
15. En déduire qu'une variable aléatoire X suivant une loi normale est infiniment divisible.

Dans la suite de cette partie, on désigne par X une variable aléatoire réelle pour laquelle il existe un réel a strictement positif tel que $\mathbb{P}(-a \leqslant X \leqslant a) = 1$.
On admettra que X admet une espérance et une variance finies.

16. En remarquant que $\mathbb{V}(X) \leqslant \mathbb{E}(X^2)$, montrer que $\mathbb{V}(X) \leqslant a^2$.

On suppose maintenant que X est infiniment divisible et suit, pour n entier non nul, la même loi que $\sum_{k=1}^{n} X_{k,n}$ comme dans la définition donnée en introduction de cette partie.

17. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(X_{1,n} < -\dfrac{a}{n}\right) = 0$.
18. En déduire que $\mathbb{V}(X) \leqslant \dfrac{a^2}{n}$, puis que $\mathbb{V}(X) = 0$.
19. Donner deux exemples de variables aléatoires réelles, l'une discrète, l'autre absolument continue, qui ne sont pas infiniment divisibles.

Partie 2 - Lois stables

Une variable aléatoire définie sur $\mathcal{E}$ est dite **stable** si pour tout entier supérieur ou égal à 1, et toutes variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant la même loi que X, il existe des réels a_n (avec $a_n > 0$) et b_n tels que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \text{ suive la même loi que } a_n X + b_n}$.

20. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$; soient Y et Z indépendantes suivant la même loi que X. On suppose qu'il existe a et b réels avec $a > 0$ tels que $Y + Z$ suive la même loi que $aX + b$.
Montrer que $\begin{cases} 2\lambda & = a\lambda + b \\ 2\lambda & = a^2\lambda \end{cases}$ et en déduire une contradiction.
21. Que conclure en ce qui concerne les lois infiniment divisibles et les lois stables ?
22. Montrer que toute loi stable est infiniment divisible.
23. Montrer qu'une variable aléatoire réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est stable.
24. Montrer qu'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy (voir premier problème) est à la fois stable et infiniment divisible.

Jusqu'à la fin de cette partie, on s'intéresse à une variable aléatoire X stable de variance finie $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ non nulle. Pour n entier naturel non nul, on note $a_n > 0$ et b_n des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ suive la même loi que $a_n X + b_n$ et où les variables aléatoires X_k sont indépendantes et suivent la même loi que X.

25. Calculer a_n et b_n en fonction de n et de l'espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$ de X.
26. En utilisant le théorème de la limite centrée, montrer que X suit une loi normale.
27. Le résultat de la question 24 vous semble-t-il contradictoire ?