INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES
CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES ADMINISTRATEURS
ET
CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE (Option Economie)
Division des Statisticiens économistes

Mai 1993

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte par le correcteur.
Toute question où les notations de l'énoncé ne seraient pas respectées se verra attribuer la note zéro.
Enfin, il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation de la copie.

La durée de l'épreuve est de 4 heures.

Le candidat traitera les deux problèmes, qui sont complètement indépendants.

PROBLEME I

Dans tout le problème x désigne un réel *strictement positif*, et n un entier naturel.

Partie I

1° **a)** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

b) On pose:

$$F_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt \qquad (1)$$

Montrer que $F_n(x)$ converge pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, et vérifie:

$$0 < F_n(x) < \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}.$$

c) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, et calculer sa dérivée F_n'.

2° On pose $f_0(x) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$ (avec la convention $0! = 1$).

a) Etablir pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence:

$$F_n(x) = \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} - (n+1)\,F_{n+1}(x). \qquad (2)$$

b) En déduire:

$$e^x F_0(x) = f_n(x) + (-1)^n\, n!\, e^x F_n(x). \qquad (3)$$

3° **a)** On pose $\varphi(x) = e^x F_0(x)$. Montrer que:

$$|\varphi(x) - f_n(x)| \leq \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\varepsilon_n = \dfrac{n!}{10^{n+1}}$ est minimal, et en déduire, pour ces valeurs de n, un majorant numérique de l'erreur commise en prenant $f_n(10)$ comme valeur approchée de $\varphi(10)$.

Partie II

1° **a)** Montrer pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x > 0$, la convergence de l'intégrale:

$$G_n(x) = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}\,(t-x)^n}{t^{n+1}}\,dt.$$

b) Exprimer la fonction G_n comme combinaison linéaire des fonctions $x \longmapsto x^p F_p(x)$.

c) Etablir que la fonction G_n est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

d) Justifier que pour $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p = 0$.

e) Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, montrer que:

$$G'_n(x) = -n\,n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}\,(t-x)^{n-1}}{t^{n+1}}\,dt. \tag{4}$$

2° **a)** Montrer que pour $n \geq 1$ et $x > 0$:

$$x\,G'_n(x) = n\,G_n(x) - n^2\,G_{n-1}(x). \tag{5}$$

b) A l'aide d'une intégration par parties - qu'on justifiera - de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}\,(t-x)^{n-1}}{t^n}\,dt$, montrer que pour $n \geq 1$ et $x > 0$ on a:

$$G'_n(x) = n\,G_{n-1}(x) + n\,G'_{n-1}(x). \tag{6}$$

c) En utilisant (5) et (6), établir pour $n \geq 1$ et $x > 0$:

$$G_{n+1}(x) = (x + 2n + 1)\,G_n(x) - n^2\,G_{n-1}(x). \tag{7}$$

d) En utilisant encore les relations (5) et (6), montrer que pour $n \geq 1$ et $x > 0$ on a:

$$x\,G''_n(x) + (x+1)\,G'_n(x) - n\,G_n(x) = 0. \tag{8}$$

Partie III

1° **a)** Etant donné l'entier $n \geq 1$, on cherche à déterminer les réels $\alpha_{n,0}, \alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,n-1}$ pour que le polynome P_n:

$$P_n(x) = x^n + \alpha_{n,n-1}\,x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n,1}\,x + \alpha_{n,0}$$

vérifie l'équation (dite *équation différentielle*) pour tout $x > 0$:

$$x\,P''_n(x) + (x+1)\,P'_n(x) - n\,P_n(x) = 0. \tag{9}$$

Montrer que les $\alpha_{n,p}$ doivent vérifier la relation de récurrence $(p+1)^2\,\alpha_{n,p+1} = (n-p)\,\alpha_{n,p}$ pour $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, où l'on a posé $\alpha_{n,n} = 1$.

b) En déduire que $\alpha_{n,p} = \dfrac{n!}{p!}\,C_n^p$, puis que $\alpha_{n,p}$ est entier.

c) Expliciter les polynomes P_1, P_2, P_3.

2° **a)** En utilisant (3) et la question (II.1.b), montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique polynome Q_n tel que pour tout $x > 0$, on ait:

$$G_n(x) = P_n(x)\,F_0(x) - Q_n(x)\,e^{-x} \tag{10}$$

et vérifier que $\displaystyle Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_{n,p}\,x^p\,f_p(x)$.

b) Expliciter les polynomes Q_1, Q_2 et Q_3.

3° **a)** Etablir pour $n \in \mathbf{N}$ et $x > 0$ les inégalités:

$$0 < G_n(x) < \frac{n!\,e^{-x}}{x} \qquad \text{et} \qquad P_n(x) > n!\,n\,x.$$

b) Montrer que pour $x > 0$ fixé, on a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{G_n(x)}{P_n(x)} e^x \right) = 0.$

c) En déduire pour $x > 0$ fixé $\varphi(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{Q_n(x)}{P_n(x)}$. Calculer $\frac{Q_3(10)}{P_3(10)}$, et en déduire une valeur approchée de $\varphi(10)$.

PROBLEME II

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel, et $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note I la matrice de l'identité de $\mathbf{R}^3$ et M la matrice: $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1° **a)** Calculer $A = \frac{1}{4}(M - I)$, puis A^2.

b) Démontrer qu'il existe une suite (u_n) de nombres réels telle que:

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \qquad M^n = I + u_n A.$$

c) Calculer u_n en fonction de n et en déduire l'expression de M^n.

2° Soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 puis J^n, et montrer que J n'est pas inversible.

3° On considère l'ensemble $E = \{aI + bJ, (a,b) \in \mathbf{R}^2\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

a) Montrer que E est stable par le produit de matrices. Montrer que E est un espace vectoriel réel; en donner une base et préciser sa dimension.

b) Déterminer quels sont les éléments de E admettant un inverse dans E, et préciser celui-ci.

c) Résoudre dans E les équations d'inconnue X:

$$(i) \quad X^2 = I \qquad\qquad (ii) \quad X^2 = X.$$

4° **a)** Montrer que $M \in E$.

b) En déduire que $M^n = [1 - (-3)^n]\,J + (-3)^n\,I$, et comparer avec le résultat obtenu en **(1.c)**.

5° Soit j l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ associé à J dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

a) Pour quelles valeurs de λ le noyau de l'endomorphisme $j - \lambda\,\mathrm{Id}$ n'est-il pas réduit au vecteur nul?

b) En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de j soit égale à

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}$.

c) Donner, dans la base $\mathcal{B}$, la matrice N de l'endomorphisme f de matrice M dans la base canonique.

d) Déterminer la matrice de $f^n = f \circ \cdots \circ f$ dans cette base.

e) Retrouver à nouveau l'expression de M^n.