INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

# ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

**Concours d'élève ingénieur de l'ENSAI**

**Concours d'attaché statisticien de l'INSEE**

MAI 2010

SPECIALITE ECONOMIE

## Composition de mathématiques

**Durée : 4 heures**

***Le sujet comprend 4 pages (y compris celle-ci).***

***Sans documents. L'usage des calculatrices est interdit.***

***Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.***

**Exercice 1.**

Dans tout l'exercice, on travaille dans l'espace vectoriel usuel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et $f$ l'endomorphisme associé à la matrice $A$, dans la base $\mathcal{B}_0$.

1) Déterminer le noyau et l'image de $f$ et donner pour chacun de ces deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ une base ainsi que sa dimension.

2) Montrer que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

3) Calculer $A^2$ et exprimer le résultat en fonction de $A$. En déduire pour $n \geq 1$, $A^n$ en fonction de $n$ et $A$.

4) Déterminer, en utilisant la question précédente, une relation entre $B^2, B$ et la matrice identité de dimension 3. En déduire que la matrice $B$ est inversible et calculer son inverse.

5) Calculer $B^n$ pour $n \geq 1$.

6) La matrice $B$ est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ ? (où $M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille $3 \times 3$ à coefficients réels). Déterminer, si c'est possible, une base propre associée à $B$.

**Exercice 2.**

On rappelle les valeurs approchées suivantes : $\ln 2 \simeq 0,7$ $\ln 3 \simeq 1,1$, $\ln 7 \simeq 1,9$.
Pour tout réel $x > -1$ on pose $f(x) = x^2 - 4\ln(1+x)$.

1) Etudier les variations de la fonction $f$ et montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une racine unique notée $\alpha$ dans l'intervalle $[2, \frac{5}{2}]$.

2) On considère la fonction $g$ définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = x - \frac{f(x)}{4}$ et la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et pour $n \geq 0, u_{n+1} = g(u_n)$.

2-a) Montrer que $g([2, \alpha]) \subset [2, \alpha]$.

2-b) Montrer que la suite $(u_n)$ est bien définie et que pour tout $n \geq 0, u_n \in [2, \alpha]$.

2-c) Montrer que la suite $(u_n)$ converge et préciser sa limite.

2-d) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2 \times 3^n}$. (on pourra étudier la fonction $g'$ sur $[2, \frac{5}{2}]$).

## Exercice 3.

On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

et on donne les valeurs approchées suivantes : $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0,8$ et $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,6$.

On note $f$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ si $x \geq 0$.

1) 1-a) Donner la définition d'une densité associée à une variable aléatoire réelle.

1-b) Montrer que la fonction $f$ est une densité.

2) Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité $f$. Calculer les moments d'ordre 1 et 2 de $X$. En déduire la variance de $X$.

3) On considère les deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ définies sur $[0,1]$ par

$$\varphi(x) = (e^{-\frac{1}{2}} - 1)x + 1 - e^{\frac{-x^2}{2}} \text{ et } \psi(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}(2 - x).$$

3-a) Calculer $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\psi''(x)$.

3-b) Tracer le tableau des variations de chacune des deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ sur $[0,1]$. On montrera en particulier que la fonction $\varphi$ atteint son minimum en un point $\alpha \in [0,1]$, sans chercher à calculer la valeur de $\alpha$, ni celle de $\varphi(\alpha)$.

3-c) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$(e^{-\frac{1}{2}} - 1)x + 1 \leq e^{\frac{-x^2}{2}} \leq e^{-\frac{1}{2}}(2 - x).$$

3-d) En déduire un encadrement de la probabilité de l'évènement $[0 \leq X \leq 1]$.

4) On admettra dans cette question que la probabilité de l'évènement $[X \geq 2]$ a une valeur approchée égale à $4,5 \times 10^{-2}$. Donner un encadrement de la probabilité conditionnelle de l'évènement $[X \geq 2]$ sachant que $X \geq 1$.

**Exercice 4.**

Soit $E$ un espace vectoriel réel.

1) Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$. Pour la condition nécessaire, on pourra prouver la contraposée en considérant $x \in F_1 \setminus F_2$, $y \in F_2 \setminus F_1$ et le vecteur $x + y$.

2) Soient $F_1, F_2, \ldots, F_k$, $k$ sous-espaces vectoriels stricts de $E$. (ceci signifie que chaque $F_i$ est différent de $E$). On se propose de montrer, par récurrence sur $k$, que leur réunion n'est pas égale à $E$.

2-a) Montrer le résultat pour $k = 2$.

On se donne maintenant $k + 1$ sous-espaces vectoriels stricts $F_1, F_2, \ldots, F_{k+1}$, on note $A_k$ la réunion des $k$ sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ et on suppose qu'il existe $x \in F_{k+1} \setminus A_k$ et $y \in A_k \setminus F_{k+1}$. On note enfin $f : \mathbb{R} \to E$ l'application : $\alpha \mapsto \alpha x + y$.

2-b) Montrer que $f(\mathbb{R}) \cap F_{k+1} = \emptyset$.

2-c) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $f(\mathbb{R}) \cap F_i$ contient au plus un élément.

2-d) Conclure.