J. 7000893

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève ingénieur de l'ENSAI
concours d'attaché de l'INSEE

MAI 2007

SPECIALITE ECONOMIE

composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit.

Le sujet comprend 5 pages (y compris celle-ci).

Le sujet se compose de deux exercices et de deux problèmes indépendants.

Exercice 1

-Partie A-

Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x) \end{array} \right.$

1. Calculer $f(0)$, $\int_0^1 f'(x)dx$ et $\int_0^1 |f'(x)|dx$.
2. Étudier les variations de f et en déduire son maximum.

-Partie B-

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, telle que $f(0) = 0$, $\int_0^1 f'(x)dx = 0$ et $\int_0^1 |f'(x)|dx = 1$.

1. On suppose f croissante puis décroissante. Calculer le maximum de f.
2. Sans cette hypothèse, trouver une borne supérieure pour f.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = 0$$

   On notera G l'ensemble des solutions de cette équation.
2. Rappeler la définition d'un groupe.
3. Montrer que, en adjoignant à G un nombre complexe bien choisi u, $G\bigcup\{u\}$ est un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $\mathbb{C}$.

Problème 1

On se propose d'étudier la suite récurrente d'ordre 3 définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n$$

$$(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$$

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et d'une matrice A qu'on explicitera.
2. Calculer AX pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire les valeurs de la suite pour $u_0 = u_1 = u_2 = 1$.
3. Comment s'appelle le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour la matrice A ?
4. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A *(On pourra utiliser les questions précédentes).* A est-elle diagonalisable ?
5. Diagonaliser A en explicitant la matrice de passage.
6. En décomposant le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base de vecteurs propres, calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour les valeurs de départ $u_0 = 1,\ u_1 = 5,\ u_2 = 1$.
7. Peut-on choisir des valeurs de départ u_0, u_1 et u_2 telles que $u_{100} = u_{101} = 0$ et $u_{102} = 10^{12}$? *(on argumentera sa réponse).*
8. Soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour la matrice ${}^tA$ associé à la valeur propre λ. Calculer les valeurs de la suite définie par l'equation

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = z_1 u_{n+2} + z_2 u_{n+1} + z_3 u_n$$

en fonction de $v_0 = z_1 u_2 + z_2 u_1 + z_3 u_0$.

<u>Problème</u> 2

Dans toute la suite, X désigne une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

-<u>Partie A</u>-

On définit $\Delta(X)$ comme l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$, puis la transformée de Laplace (réelle) de X par

$$\forall t \in \Delta(X),\ \mathcal{L}(X)(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

1. Montrer $0 \in \Delta(X)$ et calculer $\mathcal{L}(X)(0)$.
2. Montrer que si $0 < a < b$ ou $b < a < 0$, $e^{aX} < 1 + e^{bX}$. En déduire que $\Delta(X)$ est un intervalle.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Calculer $\mathcal{L}(X+Y)(t)$ pour $t \in \Delta(X) \bigcap \Delta(Y)$.
4. Calculer la transformée de Laplace (et l'intervalle $\Delta(X)$ associé) d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(1,p)$ (appelée aussi loi de Bernouilli), puis pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (*on pourra l'exprimer comme somme de variables aléatoires*).
5. Calculer la transformée de Laplace (et l'intervalle $\Delta(X)$ associé) d'une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de coefficient $0 < p < 1$: $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$.
6. Calculer la transformée de Laplace (et l'intervalle $\Delta(X)$ associé) d'une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite, puis d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
7. Dans ce dernier cas, calculer les dérivées premières et seconde de $\mathcal{L}(X)(t)$ en 0. Que remarque-t-on ?

-<u>Partie B</u>-

Dans cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire positive de densité f continue. On suppose également l'existence d'un réel $a > 0$, $a \in \Delta(X)$.

1. Calculer $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$, $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$. Qu'en déduit-on sur les valeurs de f pour les $x < 0$?
2. Exprimer la transformée de Laplace en fonction de f.

3. Montrer que $\mathbb{R}_- \subset \Delta(X)$.
4. Soit $M > 0$ fixé. Calculer $\int_0^M e^{tx}dx$, et en déduire la limite de $\int_0^M e^{tx} f(x)dx$ quand $t \to -\infty$.
5. En déduire que $\mathcal{L}(X)(t)$ admet une limite en $-\infty$ et la calculer.
6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, $t \in]-\infty, a[$. Montrer que $|e^{tx} - 1| \leq |tx|e^{ax}$.
7. Soit $M > 0$ fixé. En déduire que $\int_0^M (e^{tx} - 1)f(x)dx \underset{t\to 0}{\to} 0$.
8. En déduire que $\mathcal{L}(X)(t)$ est continu en 0.