J. 6 000952

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève ingénieur de l'ENSAI
concours d'attaché de l'INSEE

MAI 2006

SPECIALITE ECONOMIE

composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit.

Le sujet comprend 4 pages (y compris celle-ci).

Le sujet se compose d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

Dans tout ce qui suit, C désigne le corps des complexes et IR le corps des réels. La fonction logarithme népérien est notée ln.

Exercice 1

Soit $U_n = \{z \in C / z^n = 1\}$.

1. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que $\omega \in U_n$. Donner la forme générale des éléments de U_n.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$, montrer que

$$B = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-2(n-1)} & \cdots & \omega^{-(n-1)^2} \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Problème 1

Soit $M_n(IR)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On considère l'application $N_\infty : M_n(IR) \to IR^+$ qui a toute matrice A de $M_n(IR)$ de terme général a_{ij} associe $N_\infty(A) = \underset{ij}{Max}|a_{ij}|$.

Première partie

a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_2(IR)$. Calculer $N_\infty(P)$.

b) Montrer que pour tout λ réel et pour toute matrice A de $M_n(IR)$, $N_\infty(\lambda A) = |\lambda| N_\infty(A)$.

c) Montrer que si A et B sont deux matrices de $M_n(IR)$, $N_\infty(A+B) \le N_\infty(A) + N_\infty(B)$.

d) Montrer que $N_\infty(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est la matrice nulle de $M_n(IR)$.

Deuxième partie

Soit $R = \lambda I_n + N, \lambda \in IR, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$ et I_n est la matrice identité de $M_n(IR)$.

a) Montrer que $I, N, \ldots, N^{n-1}$ est une famille libre de $M_n(IR)$.

b) Calculer R^2 et R^3.

c) Montrer que pour tout entier naturel $q \geq n$,

$$R^q = \lambda^q \left(I + \frac{C_q^1}{\lambda} N + \frac{C_q^2}{\lambda^2} N^2 + \cdots + \frac{C_q^{n-1}}{\lambda^{n-1}} N^{n-1} \right),$$

où $C_q^k = \dfrac{q!}{k!(q-k)!}$.

d) Calculer $N_\infty(R^q), q \geq n$.

e) Montrer que $\left[N_\infty(R^q)\right]^{\frac{1}{q}} \xrightarrow[q \to +\infty]{} |\lambda|$. On admettra pour cela que C_q^{n-1} est équivalent à $\dfrac{q^{n-1}}{(n-1)!}$ lorsque q tend vers l'infini.

Problème 2

On définit une application f de $[0,+\infty[$ dans IR par :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x} \text{ si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

Préliminaire

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de l'application f. On rappelle qu'au voisinage de 0,

$\ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h)$, avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

2. Dresser le tableau de variation de f.

Première partie

On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour tout x de $[0,+\infty[$.

1. Dire pourquoi F est définie sur $[0,+\infty[$.

2. Prouver que : $\forall x \in]0,1[,\ F(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$. On admettra que ces intégrales sont bien définie car les fonctions $x \to \dfrac{x}{\ln x}$ et $x \to \dfrac{1}{\ln x}$ sont prolongeables par continuité en 0. On admettra également qu'il est possible de faire des changements de variable dans ces conditions.

3. Prouver que : $\forall x \in]0,1[, \forall t \in [x^2, x], \dfrac{1}{\ln x} \leq \dfrac{1}{\ln t} \leq \dfrac{1}{\ln x^2}$.

4. En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ que l'on notera L_0.

5. Prouver que l'on ne modifie pas l'existence et la valeur éventuelles de $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ en remplaçant $\dfrac{1}{\ln t}$ par $\left(\dfrac{1}{\ln t} - \varphi(t) \right)$ où φ est une application continue et bornée sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

6. En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt$. On pourra considérer l'application $\varphi(t) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ que l'on prolongera par continuité en 1. On vérifiera que cette fonction possède bien les propriétés requises pour pouvoir appliquer la question précédente. Calculer cette dernière limite que l'on notera L_1.

7. On définit une application G de $[0,+\infty[$ dans IR par $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ si $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $G(0) = L_0$ et $G(1) = L_1$. Prouver que $G = F$. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Deuxième partie

Etudier et représenter graphiquement l'application $F(= G)$. Préciser la tangente au point d'abscisse $x = 1$.

Troisième partie

On considère la fonction $I_y(x) = \int_x^y \frac{t-1}{\ln t} dt$.

1. Indiquer pour quelles valeurs de x et de y la fonction $I_y(x)$ est définie.
2. Effectuer le changement de variable $t = e^{-u}$ en justifiant sa validité.
3. Montrer que la fonction obtenue est l'intégrale d'une fonction prolongeable par continuité en 1.
4. Démontrer que : $\forall Y > 0, \int_1^Y \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = -\int_Y^{2Y} \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$.
5. Montrer que la fonction $t \to \frac{e^{-t}}{t}$ est majorée sur $[1,+\infty[$ par la fonction $t \to e^{-t}$.
6. En déduire un encadrement de $J(x)$ sur $[1,+\infty[$ et en déduire que la fonction $J(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
7. En déduire que $\lim\limits_{Y\to+\infty} \int_Y^{2Y} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0$.
8. On se propose d'étudier de même pour $X > 0$, $\int_X^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ et $\lim\limits_{X\to 0} \int_X^{2X} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

a) Montrer que la fonction $x \to \frac{1 - e^{-x}}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

b) En appliquant le théorème selon lequel toute fonction continue sur un segment fermé est bornée sur ce segment, montrer que $\lim\limits_{X\to 0} \int_X^{2X} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = 0$.

c) En déduire que $\lim\limits_{X\to 0} \int_X^{2X} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln 2$.

8. En déduire une seconde méthode de calcul de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.