MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Sylvain Arlot, Aurélien Garivier

Coefficient : 3

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Commentaires généraux

Le sujet de cette année était composé de trois exercices indépendants et portant sur des aspects totalement différents du programme. La forme habituelle (deux exercices courts, un problème) était très légèrement bousculée, et pourrait l'être un peu plus à l'avenir, dans la mesure où les caractéristiques essentielles de l'épreuve sont maintenues : un sujet long, composé de plusieurs exercices ou problèmes indépendants, couvrant une très large partie du programme, et permettant à chaque candidat de valoriser ses connaissances, ses aptitudes et la qualité de ses raisonnements mathématiques sur des questions de difficultés variées.

Les premières questions de chaque exercice permettaient de tester l'acquisition des connaissances de base en analyse, algèbre et probabilités. Ensuite, chaque exercice comportait quelques questions nécessitant plus de maîtrise et de recul.

Tous les candidats suffisamment préparés auraient dû facilement venir à bout des questions I.1–2, II.1, II.6 (première partie), III.1–2 : cela assurait déjà une note supérieure à 7/20, niveau que seuls 220 candidats ont atteint. Il semblait assez facile de résoudre en plus les questions I.3 (deuxième partie), I.5–6,8, I.13 (première partie), III.3 (deuxième partie), III.6–7 ; on obtenait ainsi une note supérieure à 13.5/20, comme les 51 meilleures copies cette année. On pouvait même obtenir une note supérieure à 16.5/20 (comme 9 candidats cette année) en ne résolvant que les questions I.1–3,5–6,8,14, II.1–2,6, III.1–3,6–7. Il pouvait donc s'avérer très payant de porter une grande attention à rédiger avec rigueur (et concision) ces questions assez classiques, plutôt que de survoler l'ensemble du sujet en effectuant des raisonnements incomplets (et souvent faux pour les questions délicates). Enfin, les candidats préférant prendre le temps de faire aboutir des raisonnements plus fins trouvaient dans les questions I.9,12–13,II.3,III.9 et surtout I.10,15, II.5, III.10 matière à réflexion, et pouvaient obtenir d'excellentes notes sans en traiter un grand nombre.

Globalement, le jury a été assez déçu de trouver une quantité particulièrement importante de copies tout à fait indigentes de candidats n'ayant manifestement pas acquis les connaissances exigibles à ce niveau : il semble malheureusement qu'il reste encore de trop nombreux candidats négligeant totalement l'épreuve de mathématiques, malgré l'évolution des dernières années rendant plus utile que jamais à l'admissibilité un investissement minimal. Signalons donc que parmi les 58 admissibles à l'ENS, seuls 6 ont obtenus une note en mathématiques strictement inférieure à 10/20. Au-delà même des copies indigentes, les questions I.1,2,14, II.4, III.2,6 n'auraient pas dû poser tant de difficultés.

Surtout, un grand nombre de candidats mélangent dans leurs copies arguments valables et totalement spécieux, ayant probablement à l'esprit que le correcteur se chargera de reconnaître les bons. La faute en incombe probablement au jury qui, jusqu'alors, avait pour principe de noter uniquement “positivement”, se bornant essentiellement à rechercher dans la copie tout ce qu'il pouvait valoriser dans son barême. Pour éviter de telles dérives, le jury réfléchit à la possibilité de sanctionner par des "points malus" les erreurs et les contre-vérités les plus graves. Ainsi, le candidat qui écrit dans sa copie exactement les arguments nécessaires aux questions qu'il sait pouvoir traiter prendra un juste avantage sur celui qui multiplie les réponses en pensant multiplier les chances de tomber juste. Par exemple, dire que la fonction f est 1-périodique parce que cos et sin seraient π-périodiques (question I.2) ou que $\mathbb{Z}$ est un espace vectoriel (question I.3) mérite d'être sanctionné. De même, à la question I.13, affirmer que h est continue (en 0) car f et g le sont manifeste une incompréhension totale de l'exercice.

À l'inverse, les meilleures copies ont impressionné par la précision de leur rédaction, la qualité des raisonnements présentés et la quantité de questions traitées correctement : on pourrait croire que leurs auteurs suivent un cursus de mathématiques.

Avant de rentrer dans le détail des exercices, voici quelques conseils aux candidats pour la rédaction de leur copie :

- il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses à un même exercice soient présentées dans l'ordre, et qu'en tous cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire !
- Recopier une question de l'énoncé ne peut jamais rapporter de point et demeure parfaitement inutile. Rappeler la simple définition d'une fonction impaire n'est pas non plus valorisé.
- Énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut pas servir le candidat, mais seulement jeter la suspicion sur tout ce qu'il écrit.
- Bien qu'il ne nous semble dommage que des étudiants ayant choisi la voie BL se soient suffisamment éloignés des mathématiques pour en arriver là, ceux qui choisissent de rendre copie blanche doivent bien prendre garde à ne pas signer leur copie après avoir copié la mention qui leur est demandée.

Commentaires détaillés sur chaque exercice

Exercice I. Dans le premier exercice, on se proposait de montrer de façon élémentaire une jolie égalité attribuée à Euler. Cet exercice mêlait trigonométrie, suites et séries numériques, développements limités, un minimum de connaissance sur les espaces vectoriels, et quelques raisonnements d'analyse de base. Peut-être du fait de son positionnement, il a été abordé par presque tous les candidats, qui n'ont pas toujours brillé malgré la présence de nombreuses questions très abordables.

1. Il était explicitement demandé d'utiliser la formule de De Moivre (que beaucoup ne connaissent pas ou confondent avec d'autres formules de trigonométrie), et pas un cas particulier de la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. Parmi ceux qui l'énoncent correctement, certains n'arrivent pas à conclure faute d'identifier parties réelles et imaginaires ; ils s'enferment alors dans des raisonnements circulaires, prouvant i) en supposant ii) puis prouvant ii) en supposant i).
2. On lit très souvent que pour être continue, une fonction doit être dérivable. De même, une petite centaine de candidats affirme que les fonctions cos et sin sont π-périodiques.
3. Pour la première partie de la question, de nombreux candidats invoquent une prétendue stabilité de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ par produit, ou bien le fait qu'un réel non entier serait nécessairement rationnel ; le plus simple est certainement de montrer la contraposée. Par contre, la deuxième partie de cette question est peut-être ce qui est le mieux traité de tout le sujet : les candidats semblent avoir plutôt bien compris la notion d'espace vectoriel, mais ils éprouvent beaucoup de difficultés à affronter des calculs ou des raisonnements d'analyse. Malgré cela, de nombreuses copies prétendent avoir montré que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ (voire de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$).

4. Nous avons lu souvent ici que $f((x+1)/2) = f(x/2)$ car f est 1-périodique ; les autres erreurs les plus fréquentes provenaient de la mauvaise maîtrise des formules trigonométriques de base.
5. Plusieurs candidats font le raisonnement à l'envers et réduisent la fraction rationnelle en éléments simples, ce qui est un peu plus difficile. De nombreuses copies font ici un raisonnement par récurrence, ce qui rallonge inutilement la preuve.
6. Parmi les étourderies les plus fréquentes, on lit souvent que $2x/(x^2-k^2) \sim k^{-2}$ quand k tend vers l'infini. Plus grave, certains écrivent que $\sum x/(x^2-k^2) \sim \sum k^{-2}$, perdant ainsi des points alors qu'ils avaient saisi l'idée à avancer. Enfin, beaucoup de copies plus faibles confondent de manière répétée dans l'exercice les asymptotiques $n \to \infty$ et $x \to \infty$.

7–8. Sans mentionner explicitement le passage à la limite, on ne pouvait pas avoir tous les points. La question 7 n'était pas spécialement facile, mais elle a étrangement attiré énormément de candidats très faibles qui n'ont souvent tenté quasiment que celle-là. Notons que les questions 6 à 9 demandaient aux candidats de prendre un peu de recul pour choisir la bonne formule à utiliser pour g_n, entre sa définition et la formule obtenue à la question 5 (sauf à la question 8, où les deux conduisaient au résultat, avec des niveaux de difficulté différents). Beaucoup de candidats se sont ainsi lancés dans des calculs dantesques, et prétendu *in fine* à des simplifications miraculeuses (et fausses !). Nous les invitons plutôt à reconnaître que leur réponse est incomplète (ce que nous avons apprécié de lire dans quelques copies), ou mieux, à faire preuve de sens critique et reprendre leur calcul à partir de l'autre formule pour g_n (en général avec succès dans les quelques copies concernées).

9. Question très rarement traitée correctement, notamment parce qu'on est amené à utiliser à la fois g_n et g_{2n}.
10. La continuité de g_n sur $]0,1[$ fournissait un demi-point très facilement. La fin de la question était par contre plus délicate. Beaucoup de candidats ont de grandes difficultés à raisonner correctement sur des inégalités dès lors qu'interviennent des valeurs absolues, ou une quantité comme x^2-k^2 que beaucoup ont crue positive.
11. On pouvait voir en cette question une application très classique des développements limités, qu'assez peu de copies manipulent avec toute la rigueur nécessaire. Une copie a tenté d'utiliser la (quelque peu désuète) règle de L'Hôpital.
12. La majorité des candidats ont cru (ou fait semblant de croire) que l'on pouvait utiliser le résultat de la question 10, oubliant la présence du facteur multiplicatif $|x| < 1$ dans l'inégalité demandée. Pour obtenir la deuxième partie de la question, il fallait passer à la limite quand $n \to \infty$ puis quand $x \to 0$, et pas dans l'ordre inverse comme la majorité des candidats qui ont abordé cette question.
13. La première partie de la question, très facile, permettait de grapiller un demi-point. La continuité est évidemment plus délicate : en particulier, pour qu'une fonction soit continue sur $\mathbb{R}$ il ne suffit pas qu'elle le soit sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z}$...
14. Cette question, qui nous semble pourtant très classique, a été très peu abordée, y compris par des copies plutôt bonnes par ailleurs.

Exercice II. Le deuxième exercice, mêlant algèbre linéaire et polynômes, n'a guère été apprécié des candidats. Si bon nombre d'entre eux (probablement au fait des épreuves antérieures) montrent une certaine connaissance de la division euclidienne, il n'en demeure pas moins que les résultats très importants d'algèbre linéaire qui permettaient de traiter la question 4 sont très insuffisamment maîtrisés.

1. Beaucoup sont gênés seulement par les cas $j \in \{0,1,2\}$: la division leur paraît impossible pour un numérateur de degré plus faible que celui du dénominateur. Un candidat livre même son dépit : il serait plus facile de diviser X^5 par X^2-1... D'autres intervertissent quotient et reste (mais pas pour toutes les valeurs de j). Pour ceux

qui répondent correctement à la question, il est important de savoir mettre en avant le résultat, qu'il ne soit pas caché dans une argumentation (d'ailleurs complètement inutile ici), ou bien dans des équations du genre : $X^6 - X^4 = X^5 \times X - X^4$, charge au correcteur d'aller y trouver $\phi^A(X^4)$.

2. On obtenait déjà un demi-point en justifiant que ϕ^A était bien à valeur dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Pour la linéarité, rares sont ceux qui ont correctement évoqué l'unicité du reste dans la division euclidienne. On lisait parfois des énormités du genre : "tout polynôme est linéaire donc le reste de la division de polynômes réels est linéaire".
3. La réponse était difficile à rédiger, mais une trentaine de candidats avaient manifestement saisi l'idée.
4. À la grande déception des correcteurs, cette question d'algèbre linéaire n'a pas été exploitée par les candidats à la recherche de points faciles. Beaucoup semblent d'ailleurs avoir eu du mal à interpréter le résultat donné à la question 3.
5. Sans qu'elle soit très difficile, cette question nécessitait un certain recul et n'a été que très rarement abordée (sauf par les candidats qui croyaient évident que $(\phi^A)^{-1}$ était de la forme ϕ^U). Une seule copie a tenté d'utiliser le résultat admis dans l'énoncé (qu'il fallait effectivement appliquer), mais sans succès.
6. Tous ceux qui maîtrisaient la division euclidienne ont profité de la première partie de la question ; quant à la deuxième partie, de nombreux candidats l'ont résolue sans suivre la logique de l'exercice, en inversant implicitement M^A. Deux candidats ont proposé la réponse la plus simple : ils ont reconnu que $X^4 + X^3 + 1 = -\phi(X^4) - \phi(X^3) - \phi(X^4 + X^2 + 1)$.

Exercice III. Cet exercice de statistiques permettait de vérifier la compréhension par les candidats des probabilités élémentaires, la connaissance de la loi binomiale, de la loi des grands nombres, du théorème de la limite centrée ainsi que des notions de statistiques au programme. Il permettait aussi de vérifier que les candidats savent mener des études de fonctions élémentaires. Les premières questions ont souvent été correctement traitées, il manquait probablement un peu de temps aux candidats pour répondre aux suivantes.

1. Si la grande majorité des candidats a visiblement compris le lien entre V_i, B_i et F_i, le formalisme des probabilités pose un peu plus problème : on trouve par exemple souvent la notation $A + B$ à la place de $A \cup B$, $A \times B$ pour $A \cap B$, le parenthésage est souvent absent, etc. Un candidat écrit justement que $F_i = (B_i \cap V_i) \cup \big(\bar{B}_i \cap \bar{V}_i\big)$, mais en déduit une formule fausse pour $\mathbb{P}(V_i)$, car B_i et V_i ne sont pas indépendants.
2. Bon nombre de candidats ne semblent connaître que la loi uniforme, et cherchent absolument à la reconnaître partout. D'autres notent par réflexe n et p les paramètres d'une loi binomiale, sans même penser qu'il n'y a pas de n dans l'exercice, et que p désigne déjà autre chose. Rappelons également que l'on écrit "Bernoulli" et pas "Bernouilli" (et on écrit encore moins "une somme de bernouillies").
3. Comme chaque année pour ce genre de questions, on a pu trouver des arguments du type : $x \geqslant 0 \Rightarrow x > 0$. Les difficultés des candidats à manipuler des inégalités (*cf.* I.10) se sont retrouvées ici avec des arguments du genre $0 < \pi < 1 \Rightarrow 0 < p\pi < 1$ (sans réaliser que $p = 0$ est possible).
4. Question visiblement mal comprise par une bonne moitié des candidats, qui font varier p et π en même temps, voire ne font varier que p et gardent π fixe (est-ce parce que π était le deuxième argument de la fonction g ?). De même, beaucoup semblent n'avoir pas pris le temps de bien lire $(*)$ et oublient la présence de "$\forall \pi \in]0, 1[$" en donnant une réponse qui dépend de π.
5. Question très peu abordée, un certain nombre de candidats tentant juste un "$p = 1/2$" sans justification.
6. La première partie a été souvent réussie, la deuxième beaucoup plus rarement. Nous attendions la loi des grands nombres, les bonnes réponses l'ont implicitement redémontrée

en faisant appel à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Beaucoup trop de candidats ont obtenu comme limite $(p-1)/(2p-1)$ sous prétexte que $X \to 0$ (probablement car la notation ne fait pas apparaitre que X dépend de N), même lorsque la première partie de la question était correcte !

7. Question réussie par la plupart des candidats qui l'ont abordée. Se borner à donner la définition de la variance ne rapporte pas de point.
8. Très peu de candidats ont pensé au théorème de la limite centrée. Rappelons également que la loi normale centrée de variance σ^2 se note $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et non $\mathcal{N}(0, \sigma)$; plutôt que d'employer une notation compacte mal maitrisée (et pas toujours très lisible), les candidats pouvaient faire une phrase pour décrire la loi limite.