UHCE 954

SESSION 2009

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines – Cachan – ENSAE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages (dans la version d'origine, pas celle-ci)

L'usage de la calculatrice est interdit.

Les deux exercices et le problème qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans chacune de ces parties, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes, du moment qu'il l'aura clairement indiqué.
Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté et de la précision de la rédaction.

Exercice I

(A) On rappelle que si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, alors la division euclidienne de P par Q fournit deux polynômes S et R, uniques, tels que

$$P(X) = S(X)Q(X) + R(X),$$

et tels que le degré de R soit strictement inférieur au degré de Q.

(1) Trouver les polynômes S et R résultats de la division euclidienne de $P(X) = X + 1$ par $Q(X) = X - 2$.

(2) Trouver les polynômes S et R résultats de la division euclidienne de $P(X) = X^2 - X - 2$ par $Q(X) = X + 1$.

(3) Soit n un entier naturel fixé. Trouver le polynôme R de degré inférieur ou égal à 1 tel qu'il existe un polynôme S vérifiant $X^n = S(X)\left(X^2 - X - 2\right) + R(X)$.

(B) Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on peut écrire $P(X)$ sous la forme suivante :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

où n est le degré de P et où les a_i sont ses coefficients. On définit alors pour toute matrice carrée A, de taille $k \times k$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, la matrice carrée $P(A)$ par

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_k,$$

où I_k est la matrice identité, de taille $k \times k$. On pourra utiliser dans la suite, sans le rejustifier, que pour tous polynômes P, P_1, P_2, P_3 tels que $P(X) = P_1(X)P_2(X) + P_3(X)$, on a
$$P(A) = P_1(A)P_2(A) + P_3(A) = P_2(A)P_1(A) + P_3(A).$$
Soit t un réel non nul. On s'intéresse, dans les questions (4) et (5) seulement, à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ 1/t & 0 & t \\ 1/t^2 & 1/t & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Montrer que si $P(X) = X^2 - X - 2$ alors $P(A)$ est la matrice nulle.

(5) Soit n un entier naturel fixé. Montrer qu'il existe des nombres a_n et b_n que l'on précisera tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

(C) Revenons au cas général. Soit $k \geqslant 1$ un entier fixé. On définit pour toute matrice carrée A, de taille $k \times k$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, le noyau de cette matrice par
$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ z \in \mathbb{R}^k \text{ tels que } Az = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
On se donne deux polynômes P et Q tels que le résultat de la division euclidienne de P par Q soit de la forme $P(X) = S(X)Q(X) + r$, où r est un nombre réel non nul.

(6) Montrer que $\mathrm{Ker}(P(A))$ est en somme directe avec $\mathrm{Ker}(Q(A))$.

(7) On considère le polynôme produit PQ défini par $PQ(X) = P(X)Q(X)$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\,(PQ(A)) = \mathrm{Ker}\,(P(A)) \oplus \mathrm{Ker}\,(Q(A))$.

Exercice II

(A) On s'intéresse aux fonctions $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et telles que
$$\begin{cases} g'(t) \geqslant g(t) & \text{pour tout } t > 0, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

(1) Donner un exemple de fonction g non identiquement nulle vérifiant ces conditions.

(2) Montrer que si g vérifie ces conditions, alors g est une fonction positive ou nulle.
Indication : on pourra s'intéresser à la fonction $w(t) = g(t)e^{-t}$.

(3) Montrer que si on est de plus dans le cas d'égalité (i.e., $g'(t) = g(t)$ pour tout $t > 0$) alors g est la fonction identiquement nulle.

(B) On s'intéresse maintenant aux fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et telles que
$$\begin{cases} f'(t) = t^2 + f(t) & \text{pour tout } t > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

(4) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_0(t) = e^t \displaystyle\int_0^t x^2 e^{-x} \, \mathrm{d}x$. Montrer que f_0 est une fonction qui vérifie les conditions ci-dessus.

(5) Montrer que f_0 est la seule fonction qui vérifie les conditions ci-dessus.

(C) On s'intéresse maintenant à une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que
$$\begin{cases} h'(t) = t^2 + h(t)^2 + h(t) & \text{pour tout } t > 0, \\ h(0) = 0. \end{cases}$$
On veut montrer qu'il n'existe pas une telle fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'une telle fonction h existe.

(6) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $h(t) \geqslant f_0(t)$. En déduire que $h(t) > 0$ quand $t > 0$.

(7) Soit $u > 0$ un réel fixé. Montrer que pour tout $t > u$,
$$h(t) \geqslant \frac{h(u)}{1 - (t-u)h(u)}.$$
Indication : on pourra montrer que $\dfrac{h'(x)}{h(x)^2} \geqslant 1$.

(8) Montrer que, quand t est assez grand, $h(t)$ ne peut pas être défini et conclure.

Problème

Le but de ce problème est d'étudier les variations du nombre d'exemplaires disponibles d'un livre (disons, votre manuel favori d'économie) dans une bibliothèque. Le règlement de cette bibliothèque est le suivant : un livre emprunté au cours de la semaine numéro n doit impérativement être rendu à la fin de la semaine $n+1$, de sorte qu'il pourra être remis dans les rayons au début de la semaine $n+2$. On appelle N le nombre total d'exemplaires que possède la bibliothèque. On suppose que chaque semaine, un exemplaire disponible a (indépendamment de tout le reste) une probabilité $p \in]0,1[$ d'être emprunté. On suppose par ailleurs que tous les exemplaires empruntés à la semaine n sont rendus juste à temps : ils pourront tous être réempruntés à partir du début de la semaine $n+2$.

On note X_n le nombre de livres disponibles au début de la semaine n, et Z_n le nombre de livres empruntés au cours de la semaine n. On suppose qu'au début de l'année (pour $n=1$) ils sont tous disponibles.

(A) Préliminaire : suites arithmético-géométriques

Soient r et s deux nombres réels tels que $r \neq 1$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = ru_n + s, \text{ pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Soit $\ell = s/(1-r)$, on définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_n = u_n - \ell$.

(1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = rv_n$.

(2) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{s\left(1-r^{n-1}\right)}{1-r} + r^{n-1}u_1.$$

(3) À quelle condition nécessaire et suffisante sur r, s et u_1 la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?

(B) Préliminaire probabiliste

Soit $N \geqslant 1$ un entier et soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $\{0,\ldots,N\}$. Pour k dans $\{0,\ldots,N\}$, on appelle « loi de X sachant $\{Y=k\}$ » la loi de probabilité Q sur $\{0,\ldots,N\}$ donnée par :

$$Q(j) = \mathbb{P}\left(X=j|Y=k\right) \quad \text{pour tout } j \text{ de } \{0,\ldots,N\}.$$

Pour toute fonction $h : \{0,\ldots,N\} \to \mathbb{R}$, on appelle « espérance de $h(X)$ sachant $\{Y=k\}$ » la quantité :

$$\mathbb{E}\left[h(X)|Y=k\right] = \sum_{j=0}^{N} h(j)\mathbb{P}\left(X=j|Y=k\right).$$

(4) Montrer que

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\left[h(X)|Y=k\right]\mathbb{P}\left(Y=k\right).$$

(C) Étude en espérance

(5) Expliquer avec des mots les relations

$$\begin{cases} X_1 = N, \\ X_{n+1} = N - Z_n, \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$$

(6) Donner le nom et les paramètres de la loi de Z_n sachant $\{X_n = k\}$.
Calculer $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|X_n=k\right]$ pour tout $n \geqslant 1$.

(7) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = N - p\mathbb{E}[X_n]$.

(8) Donner l'expression de $\mathbb{E}[X_n]$ en fonction de N, p et n. Quel est le comportement de la suite $\left(\mathbb{E}[X_n]\right)_n$ quand n tend vers l'infini ?

(D) Le cas $N=2$

Dans cette partie, on étudie plus précisément le cas particulier où $N=2$. On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$A_{i,j} = \mathbb{P}\left(X_{n+1}=i|X_n=j\right)$$

pour $0 \leqslant i,j \leqslant 2$. Attention : pour les besoins du problème, on numérote ici les lignes et les colonnnes de 0 à 2 (et pas de 1 à 3)

(9) Donner l'expression de la matrice A en fonction de p.

(10) Soit
$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$
l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la dernière composante est égale à 1.
Trouver trois vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathcal{E}$ tels que $Au_1 = u_1$, $Au_2 = -pu_2$ et $Au_3 = p^2u_3$.

(11) Quel est l'ensemble des valeurs propres de A ? Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(12) Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit
$$w_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$
Que vaut w_1 ? Montrer que $w_{n+1} = Aw_n$.

(13) Soient a_1, a_2, a_3 les coefficients de w_1 dans la base $\mathcal{B}$, i.e. $w_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$. Montrer que $a_1 = (1+p)^{-2}$.

(14) De la même façon, on note $a_{1,n}$, $a_{2,n}$ et $a_{3,n}$ les coefficients de w_n dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que les suites $(a_{1,n})_n$, $(a_{2,n})_n$ et $(a_{3,n})_n$ admettent des limites, notées respectivement a_1^*, a_2^* et a_3^*, que l'on calculera.
Soit $w^* = a_1^*u_1 + a_2^*u_2 + a_3^*u_3$. Montrer que $Aw^* = w^*$.

(15) Montrer que w^* définit une loi de probabilité, i.e. qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ telle que
$$w^* = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = 0) \\ \mathbb{P}(X = 1) \\ \mathbb{P}(X = 2) \end{pmatrix}.$$
Donner le nom et les paramètres de cette loi.

(E) Cas général : loi de X_n

On revient au cas général (N quelconque). On rappelle que par convention $0^0 = 1$.
Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction polynomiale G_n par la relation :
$$\forall s \in \mathbb{R}, G_n(s) = \mathbb{E}\left[s^{X_n}\right] = \sum_{k=0}^{N} s^k \mathbb{P}(X_n = k).$$

(16) Donner l'expression de G_1.

(17) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $\mathbb{P}(X_n = 0) = G_n(0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = G_n'(0)$.

(18) Plus généralement, on note $G_n^{(m)}$ la dérivée m-ième de G_n. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $m \geqslant 0$ on a
$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{m!} G_n^{(m)}(0),$$
où $m! = 1 \times 2 \times \cdots \times m$ désigne la factorielle de m, avec la convention $0! = 1! = 1$.

(19) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel s,
$$\mathbb{E}\left[s^{Z_n} | X_n = k\right] = (1 - p + ps)^k,$$
puis que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $s \neq 0$,
$$\mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}} | X_n = k\right] = s^N \left(1 - p + \frac{p}{s}\right)^k.$$

(20) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $s \neq 0$,
$$G_{n+1}(s) = s^N G_n \left(1 - p + \frac{p}{s}\right).$$

(21) Montrer qu'il existe une suite de réels $(q_n)_{n \geqslant 1}$ satisfaisant la relation de récurrence $q_{n+1} = 1 - pq_n$ et telle que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel s,
$$G_n(s) = (1 - q_n + q_n s)^N.$$
Donner l'expression de q_n en fonction de p et de n.

(22) En utilisant la question (18), montrer que X_n suit une loi binomiale de paramètres N et q_n.

(23) Montrer que la suite $(q_n)_n$ converge quand n tend vers l'infini. Quelle est sa limite ?

(24) Discuter et comparer les conclusions obtenues aux question (8), (15) et (23).