COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Pascal Massart, Gilles Stoltz

Coefficient : 3 ; **durée** : 4 heures

Commentaires généraux

Le sujet de cette année, comme celui de l'an dernier, était long et couvrait une large partie du programme, en proposant un problème d'algèbre, un exercice d'analyse, ainsi qu'un exercice de calcul de probabilités (qui était également censé mettre en jeu des techniques d'analyse, mais on verra ci-dessous le succès très relatif des questions d'analyse à l'intérieur d'un exercice de probabilités, signe sans doute d'un manque de recul sur le programme de la part de la majorité des candidats). Nous ne nous attendions évidemment pas à ce qu'il soit répondu à toutes les questions dans une même copie ; celle qui a mérité 20 n'a par exemple traité que les deux tiers du sujet environ. Un tel sujet offre ainsi aux candidats de choisir quelque peu les domaines dans lesquels ils vont s'exprimer (entre analyse, algèbre et probabilités) ; traiter deux exercices ou le problème suffit largement à dépasser la moyenne. Nous sommes très satisfaits du niveau général des candidats, tout à fait comparables à ceux des années précédentes, tant dans leurs réussites que dans leurs lacunes récurrentes.

Il semble que les candidats ont tous trouvé matière à travailler et n'ont jamais été bloqués par une seule question ; en témoigne la répartition des notes, plutôt poissonnienne (de paramètre approximativement égal à 5), preuve que le sujet contenait de larges parties pouvant être traitées indépendamment les unes des autres. On peut également noter un pic gaussien suffisamment prononcé autour de 16, qui correspond aux candidats sérieux et à l'aise en mathématiques. L'épreuve a permis de bien classer les candidats ; la notation a été large et discriminante comme le veut la règle et l'illustre l'écart-type.

Au final, toutes les questions ont été résolues de manière satisfaisante par au moins un ou deux candidats, à l'exclusion des questions 2(d) et 3 de la partie 5 du problème, qui auraient demandé un recul assez grand par rapport au sujet, ce qui, c'est bien compréhensible, n'est pas à la portée de candidats épuisés par le reste du sujet. Comme elles venaient en dernier, cela n'a gêné personne mais rend le sujet peut-être plus intéressant pour une exploitation en classe.

Une règle souvent observée d'ailleurs est que la quantité de questions traitées n'a qu'un lien plutôt lâche avec la note finale, car nous tenons grand compte de la rédaction. Comme toujours en mathématiques, où la réponse figure souvent dans la question, il est demandé aux candidats de rédiger précisément leurs réponses, ce qui signifie que nous attendons d'eux un argumentaire complet (le nom des théorèmes mis en jeu, la référence à la question où un résultat préliminaire a été montré, etc.) et concis (on évitera ainsi de formuler des énoncés dont on n'a pas besoin, même s'ils sont justes ; ou de dresser une liste exhaustive de propriétés vérifiées par un objet mathématique : on se bornera à indiquer celles qui sont suffisantes pour que la propriété demandée soit établie).

Une observation intéressante mais pas surprenante est que dans le cas de questions moins directives ("A et B sont-elles semblables ?" par exemple, question 2 de la partie 1 du problème, ou "u est-elle diagonalisable ?", question 1 de la partie 4 du problème) on peut avoir l'impression qu'un nombre non négligeable de candidats tirent au hasard leur réponse, ce qui nous permet de mieux distinguer ceux qui comprennent bien ce qui se passe des autres ; pour les questions plus directives ("montrer que ..."), ces derniers trouvent toujours en revanche un raisonnement, plus ou moins bien présenté, plus ou moins correct (voire tout à fait faux). D'une manière générale, nous rappelons aux candidats que nous ne rémunérons pas les opinions ni les arguments d'autorité ; une réponse sans justification mathématique précise équivaut à une absence de réponse et ne peut apporter de points.

Sur un autre plan, nous nous félicitions de l'interdiction de la calculatrice, qui nous a permis de trier les candidats les plus faibles grâce aux deux premières questions du problème, qui n'ont posé aucun problème conceptuel et ne requéraient qu'un peu d'habileté calculatoire. Elle restera par conséquent proscrite jusqu'à nouvel ordre.

Avant de passer aux commentaires plus spécifiques à l'épreuve de cette année, nous soulignons avec force que les commentaires généraux du rapport de l'an dernier, de même que le paragraphe qui était intitulé “Sur l'ensemble du sujet”, restent d'une actualité brûlante.

Commentaires plus spécifiques

Sur l'ensemble du sujet. Il est agaçant de constater que, malgré nos plaintes de l'an dernier, le symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ continue d'être utilisé quasiment comme un symbole de ponctuation, alors qu'il a un sens mathématique précis et univoque, celui d'implication et implication réciproque. La plupart du temps, les candidats ont manifestement en tête une implication. Nous ne pouvons donc que leur recommander vivement, s'ils ne saisissent pas le sens profond de ce symbole, de s'abstenir de l'employer et de rédiger les articulations de leur raisonnement à l'aide de conjonctions de coordination ou de subordination (“donc”, “par conséquent”, ou, selon le contexte, “si”, “seulement si”, “si et seulement si”). Il n'y a rien d'infamant, surtout pour un concours à dominante littéraire, à ne pas vouloir à tout prix utiliser de symboles mathématiques !

Les abréviations sont elles aussi toujours trop présentes ; malgré tous ses talents, le jury n'a par exemple pas réussi à déterminer le sens de IFIS dans la phrase “IFIS qu'un X_i vaille 0 pour que $Z_n = 0$” (question 2(a) de l'exercice II).

On peut malgré tout féliciter les candidats pour la présentation de leurs copies, en nette amélioration depuis les remarques du rapport de l'an dernier.

Exercice I. Cet exercice d'analyse portait sur le théorème de Rolle et son corollaire, le développement de Taylor-Lagrange, ainsi que son application aux relations entre une fonction et ses dérivées première et deuxième. Le traitement des questions 2 et 3(a) montre que la plupart des candidats refusent, consciemment ou non, d'utiliser les indications proposées.

- Question 1 : on aimerait lire des valeurs symboliques simplifiées au maximum ($\sqrt{\alpha}$ plutôt que $\alpha/\sqrt{\alpha}$ par exemple).
- Question 2 : l'inégalité de Taylor-Lagrange n'étant pas au programme, l'objet de cette question était de la prouver à l'aide de la fonction φ en lui appliquant le théorème de Rolle. Une immense majorité des candidats raisonne à l'envers, appliquant le théorème de Rolle, sans voir que la contrainte d'égalité en a et b donne la valeur de A, et en “déduisant” que dès le début on avait choisi $A = f(c)$ où $c \in]a, b[$! Ceux qui ne considéraient pas la fonction φ et citaient le théorème (avec le bon nom, et non pas “Taylor-Young” par exemple) parce que vraisemblablement ils l'avaient vu en cours n'ont pas été trop lourdement santionnés, même si la formulation de la question indiquait clairement que ce n'était pas ce qu'on attendait.
- Question 3(a) : presqu'aucun candidat n'a saisi le sens de l'indication ; la plupart l'ont utilisée pour présenter (deux fois !) le même raisonnement incorrect, utilisant que $|f(x) - f(x-h)|$ par exemple serait plus petit que M_0. Nous avons apprécié ceux qui au moins, n'utilisant pas l'indication, majoraient cette quantité par $2M_0$ et parvenaient ainsi à une borne certes deux fois trop grande mais issue d'un raisonnement correct.

  Il est à noter que dans la dernière partie de cette question, il ne fallait pas omettre de traiter à part les cas $M_0 = 0$ ou $M_2 = 0$. Pour M_0, $M_2 > 0$, l'application pourtant immédiate de la question 1 n'a souvent pas été satisfaisante ; elle a même parfois jeté les candidats dans un grand trouble (“le minimum de g se transforme en un maximum” a-t-on pu lire par exemple). D'une manière générale, les candidats n'ont pas assez souligné le point clé

ici, à savoir que la borne exhibée à la question 1 n'était pas qu'un minorant, mais bien un minimum.
- Question 3(b) : le jury a noté des solutions très élégantes fondées sur une compréhension fine de la question 3(a), qui ont évidemment récolté tous les points affectés à la question, la référence à la question 2 dans l'énoncé étant une indication plus qu'une obligation de méthode.

Exercice II. Cet exercice portait sur la notion de convergence en probabilité, qui y était redéfinie mais qui figure implicitement au programme, puisque ce dernier comporte l'énoncé de la loi des grands nombres. La question 2(c) faisait intervenir la théorie des séries numériques ; elle a été trop peu abordée à cause d'erreurs multiples aux questions 1 et 2(b).
- Question 1 : on a trop vu la tentative d'application de l'inégalité de Tchebychev, qui ne donnait qu'une condition suffisante, et encore, dans le cas de la convergence vers 0 uniquement. L'énoncé demandait pourtant clairement de commencer par calculer exactement la valeur de $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$. L'impossibilité de converger vers d'autres valeurs que 0 ou 1 a donné lieu la plupart du temps à des réponses très simplistes, comme "les X_n ne prennent que les valeurs 0 ou 1, donc $\ell = 0$ ou 1".
- Question 2(a) : beaucoup de candidats ont bien vu que Z_n suivait une loi de Bernoulli de paramètre qu'ils ont précisé, seule une minorité a parlé de loi binômiale ou de loi géométrique. Nous avons été tolérants envers les candidats qui disaient que ce paramètre était $(u_n)^n$ (pour cette question).
- Question 2(c) : trop de candidats, qui par ailleurs proposaient $(u_n)^n$ comme paramètre de la loi de Z_n, pensent que si $u_n < 1$ pour tout n alors $(u_n)^n \to 0$.
- Question 3 : l'inégalité de Tchebychev semble avoir plus de succès auprès des candidats que l'inégalité de Markov, pourtant plus simple et qui seule permettait d'obtenir le résultat ici. Pour le contre-exemple, la quasi-totalité des candidats a proposé une suite de variables de Bernoulli de paramètre 1 !

Problème. Le problème avait pour objectif ambitieux la réduction des endomorphismes nilpotents en dimension ≤ 4 ; un objectif plus raisonnable et atteint par certains candidats parmi les meilleurs a été de dresser cette réduction en dimension ≤ 3. (Une remarque d'orthographe : il s'agit bien d'endomorphismes nilpotents et non pas nihilpotents ; l'étymologie sous-jacente est cependant correcte et traduit une bonne compréhension de la propriété mathématique.) De nombreuses questions du problème (et c'est là tout le sel d'un problème par rapport à un exercice) testaient que le candidat n'avait pas trop le nez sur le guidon et comprenait où le sujet l'emmenait.
- Une erreur récurrente dans tout le problème : on n'a jamais que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est vide, car elle contient toujours l'élément nul. $E = A \oplus B$ pour deux sous-espaces vectoriels A et B de E n'implique pas que tout x de E appartienne soit à A, soit à B (en d'autres termes, A et B ne partitionnent pas l'espace, ils l'engendrent).
- Partie 1, question 1 : au vu de la question 1 de la partie 4, il ne s'agissait évidemment pas d'utiliser un résultat que certains ont pu voir en cours suite aux planches d'oraux de l'an dernier, à savoir qu'un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il n'admet que 0 comme valeur propre. Le jury recommande vivement aux candidats, pour les épreuves futures, de prendre quelques instants pour lire chaque problème et chaque exercice dans son ensemble avant de commencer à le traiter.
- La question 2 de la partie 2 a donné lieu à un florilège d'énoncés gravement incorrects.
  - $x \in \operatorname{Im} u$ n'est pas équivalent à $u(x) \in E$, qui est une trivialité s'agissant d'un endormorphisme.
  - La notation $(u(x))^2$ n'a pas de sens en général.
  - $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ n'implique pas que $u(x) = u^2(x)$ pour tout x, comme plus de la moitié des candidats l'a écrit (plus ou moins explicitement, d'ailleurs).
  - La formule appelée de Grassman n'implique pas la formule du rang.

- La question 2(b) a été résolue plusieurs fois par un raisonnement alternatif tout à fait intéressant, qui consistait à montrer d'abord que $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, grâce à l'égalité $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$, et à en déduire la somme directe par théorème du rang.
- Trop de candidats ont proposé des applications non linéaires en contre-exemple à la question 3, comme $x \in \mathbb{R} \mapsto x - 3$, ou des projecteurs, alors que, et certains autres candidats l'ont vu, l'énoncé regorgeait d'exemples idoines : la matrice B de la partie 1, l'endormorphisme D de la partie 3. On soulignera également que malgré cette question, certains candidats n'ont pas hésité à affirmer dans la suite du sujet que la formule du rang impliquait toujours que E était somme directe de $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$!

– Partie 3 : la question 1, pourtant élémentaire au possible, a souvent donné lieu à une présentation de la solution tout à fait indigente, où finalement rien n'était prouvé, typiquement de la forme

$$D(P+Q) = D\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^k + \sum_{k=1}^{n-1} k b_k X^k = D(P) + D(Q)\ .$$

Il n'est pas opportun non plus d'écrire $D(P) = P'$ et d'utiliser la linéarité de la dérivée. Enfin, le jury a été perplexe devant ceux qui vérifiaient que l'image de D n'était pas l'ensemble vide et d'autres qui prenaient des polynômes $P(X)$ et $Q(Y)$.
Questions suivantes : la représentation matricielle de D ne peut faire apparaître les variables muettes a_k. Il ne fallait pas hésiter à exploiter la représentation matricielle de D pour répondre aux questions 3 et 4 ; l'énoncé le suggérait parce que le jury sait bien que les candidats sont généralement plus à l'aise avec des matrices que des endormorphismes généraux.

– Partie 4 : les commentaires porteront essentiellement sur la question 1. Quasiment aucun candidat ne pense à montrer que 0 est effectivement valeur propre, mais tout le monde essaie de montrer que c'est la seule possible. Les candidats penseraient-ils que tout endomorphisme (sur un espace vectoriel admettant $\mathbb{R}$ pour corps de base) admet au moins une valeur propre ? Un raisonnement direct permettait d'écrire immédiatement que $\lambda^\nu = 0$ et donc $\lambda = 0$. Le jury a peu apprécié les arguments massue (certes corrects) en termes de polynômes annulateurs ; ces notions ne sont pas au programme, et on les retrouve plus souvent qu'à leur tour dans des copies par ailleurs très faibles et qui semblent se reposer sur une nébuleuse de résultats hors-programme connus par cœur (ce sont ces copies qui justifiaient la nilpotence de A et B en termes de spectre). On rappelle que l'on cherche non pas à tester la culture mathématique des candidats mais leur sens et habileté mathématiques.
La question 2 n'a été abordée que dans les bonnes copies ; en 2(a) aucune réurrence n'était nécessaire, les candidats semblent comme conditionnés à faire des raisonnements par récurrence à la vue d'un indice k. Beaucoup ont eu du mal à comprendre ce qu'il fallait démontrer en 2(b) une fois 2(a) effectuée.

– La partie 5 a eu du succès parce qu'en un certain sens, elle semble plus concrète que la partie 4 : elle donne à voir des matrices 2×2 ou 3×3. Certains, bien qu'ayant sauté la partie 4, ont bien su se remettre dans les rails du problème. A la question 1, trop de candidats utilisent un pseudo-résultat de trigonalisabilité dans $\mathbb{R}$. En matière de rédaction, on voulait lire à la réponse de la question 2(a), des justifications du type “cf. question 2(c) de la partie 4” plutôt que des trivialités du genre “$\nu \in \{1, 2, 3\}$ parce que la dimension de l'espace est 3” ; en effet, dans le premier cas, le candidat montre sa compréhension du sujet, alors que dans le second cas, le correcteur ne sait pas s'il a affaire à un candidat pour qui le résultat est évident ou à un candidat qui essaie de masquer son ignorance du mécanisme mathématique sous-jacent. Des erreurs de logique sont survenues aux questions 1 et 2(b), où certains se sont contentés de montrer que les matrices proposées avaient bien l'indice de nilpotence requis.

– Les deux dernières questions de la partie 5 n'ont été traitées complètement par personne, comme indiqué au début du rapport. On peut toutefois se féliciter de certains débuts de solution tout à fait intéressants et déplorer des “solutions” tellement fausses ou simplistes qu'elles montraient à quel point le candidat n'avait pas saisi les enjeux des questions 2(a), 2(b), 2(c) et était encore plus incapable de les généraliser à la dimension supérieure.