UHCE 554

SESSION 2005

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines – Cachan - ENSAE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

Les deux problèmes qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans chacun de ces problèmes, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes.

Problème I

Soit d un entier tel que $d \geq 2$. Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension d et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Soit $\mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On rappelle que $f \circ g$ désigne l'endomorphisme défini par

$$\forall x \in E, f \circ g(x) = f(g(x)).$$

On dit qu'un sous-ensemble F de E est **stable** par f si et seulement si

$$f(F) \subset F.$$

On suppose que f **commute** avec g, c'est-à-dire que $g \circ f = f \circ g$.

(a) Montrer que l'image de g est stable par f.

(b) Montrer que le noyau de g est stable par f.

On admettra désormais que si deux endomorphismes f et g commutent, le noyau et l'image de g sont stables par f.

2. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ des nombres réels et soit M une matrice de $\mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{d-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \lambda_d^2 & \ldots & \lambda_d^{d-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Supposons pour cette question $d = 2$. Montrer que M est inversible si et seulement si λ_1 est différent de λ_2.

(b) Supposons maintenant $d \geq 2$. Soit P un polynôme de la forme

$$P(X) = X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} p_k X^k.$$

Tournez la page S.V.P.

Prouver que la matrice M est équivalente à la matrice M' de $\mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{d-2} & P(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & P(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \dots & \lambda_d^{d-2} & P(\lambda_d) \end{pmatrix}.$$

(c) Supposons toujours que $d \geq 2$. En déduire que la matrice M est équivalente à la matrice M'' de $\mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{d-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_{d-1} & \dots & \lambda_{d-1}^{d-2} & 0 \\ 1 & \lambda_d & \dots & \lambda_d^{d-2} & (\lambda_d - \lambda_1)(\lambda_d - \lambda_2)\cdots(\lambda_d - \lambda_{d-1}) \end{pmatrix}.$$

(d) Montrer par récurrence sur d que M est inversible si et seulement si les nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont deux à deux distincts.

On admettra désormais que M est inversible si et seulement si $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont deux à deux distincts.

3. Soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. On note f^2 l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par $f^2 = f \circ f$. De même, on définit par récurrence, pour tout entier $k \geq 3$,

$$f^k = f^{k-1} \circ f = f \circ f^{k-1} = f \circ \dots \circ f \text{ “k-fois”}$$

et par convention, f^0 désigne l'identité de $\mathcal{L}(E)$.

Soit v un vecteur de E. On dit que v est un vecteur **totalisateur pour** f si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe un entier N et des réels $a_0, \dots, a_N$ tels que

$$x = a_0 v + \dots + a_N f^N(v).$$

(a) Supposons pour cette question $d = 2$ et supposons aussi que f a deux valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes. Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de E dans laquelle f est représenté par une matrice diagonale. Montrer qu'alors $v = e_1 + e_2$ est un vecteur totalisateur pour f.

(b) Dans le cas général ($d \geq 2$), montrer que si f a d valeurs propres distinctes alors il existe un vecteur v totalisateur pour f.

(c) Supposons qu'il existe un vecteur v tel que $f^d(v) = 0$ et $f^{d-1}(v) \neq 0$. Montrer que v est totalisateur pour f.

4. Soient f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et v un vecteur non nul de E. Soit q le plus grand entier tel que $\mathcal{F}_q = \{v, f(v), \dots, f^{q-1}(v)\}$ soit une famille libre.

   (a) Montrer que $1 \leq q \leq d$.

   (b) Montrer que $\text{Vect}(\mathcal{F}_q) = \{\sum_{j=0}^{q-1} a_j f^j(v), (a_0, \dots, a_{q-1}) \in \mathbb{R}^q\}$ est stable par f.

   (c) On suppose que v est un vecteur totalisateur pour f.
   Montrer que $\{v, f(v), \dots, f^{d-1}(v)\}$ est une base de E.

On admettra désormais que si f a un vecteur totalisateur v alors $\{v, f(v), \dots, f^{d-1}(v)\}$ est une base de E.

5. Soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

on définit l'endomorphisme $P(f)$ de $\mathcal{L}(E)$ par

$$P(f) = a_0 f^0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n.$$

On note $\mathbb{R}[f]$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$\mathbb{R}[f] = \{P(f), P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

On suppose toujours qu'il existe un vecteur v totalisateur pour f.

   (a) Montrer que $\mathbb{R}[f]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

   (b) On note $\Gamma(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\}$. Montrer que $\Gamma(f)$ est un sous-espace vectoriel.

   (c) Montrer que les deux sous-espaces vectoriels $\Gamma(f)$ et $\mathbb{R}[f]$ sont égaux et que $\{f^0, f, \dots, f^{d-1}\}$ est une base de $\mathbb{R}[f]$.

   (d) Trouver une base de E dans laquelle f est représenté par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix},$$

   où $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$ sont des nombres réels.

Problème II

Soit Ω un ensemble (par exemple $\mathbb{R}$). On rappelle que pour tout sous-ensemble A de Ω, la fonction $\mathbb{1}_A$ est la fonction qui va de Ω dans $\mathbb{R}$ et telle que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$. On a donc en particulier pour toute variable aléatoire X à valeurs dans Ω, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)) = \mathbb{P}(X \in A)$. On rappelle que si B est un deuxième sous-ensemble, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Préliminaires

Soit g une fonction continue non identiquement nulle de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que g vérifie la relation suivante :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2, g(s+t) = g(s)g(t).$$

(a) Montrer que $g(0) = 1$.

(b) Montrer que pour tout entier $q \geq 1$, $(g(1/q))^q = g(1)$ et en déduire que $g(1)$ est non nul.

(c) Montrer que pour tout entier p et tout entier $q \geq 1$, $g(p/q) = (g(1))^{p/q}$.

(d) On rappelle que pour tout réel x, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = x$. Montrer qu'il existe un réel λ que l'on précisera tel que pour tout nombre réel positif x, $g(x) = \exp(-\lambda x)$.

1. Soit X une variable aléatoire positive à densité. On définit la fonction de **queue**, G_X, de X par la relation suivante :

$$\forall s \in \mathbb{R}, G_X(s) = \mathbb{P}(X > s).$$

On rappelle qu'une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est une variable aléatoire de densité $\lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{x\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$.

On dit qu'une variable aléatoire positive est **sans mémoire** si et seulement si la relation suivante est vraie

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}_+^2, \mathbb{P}(X > t+s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires (à densité ou discrètes). On rappelle que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si on a

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \mathbb{P}(X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq a_1)\mathbb{P}(X_2 \leq a_2)\ldots\mathbb{P}(X_n \leq a_n).$$

(a) Calculer la fonction de queue, G_X, de X quand X est une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(b) Montrer que si X est une variable exponentielle de paramètre λ, alors X est sans mémoire.

(c) Montrer réciproquement que si X est sans mémoire, alors X est une variable exponentielle dont on précisera le paramètre.

<u>Indication</u> : *On pourra commencer par trouver une relation vérifiée par la fonction de queue* G_X.

(d) Soit X_1 et X_2 deux variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Calculer la fonction de queue de la variable aléatoire $Z = \min(X_1, X_2)$ et donner la loi de Z.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires positives indépendantes de densités respectives f_X et f_Y. On admet alors que $S = X + Y$ est aussi une variable aléatoire positive dont la densité peut se calculer par la formule suivante

$$\forall t \geq 0, f_S(t) = \int_0^t f_X(t-s) f_Y(s) ds.$$

Soit λ un réel positif. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{t \geq 0}.$$

(a) Montrer que f_n est une densité.

(b) Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a pour densité f_n.

3. Dans une usine, on met en service une machine en commençant par mettre une batterie neuve sur cette machine, puis on change la batterie, dès que celle-ci s'arrête et on remplace la batterie épuisée par une neuve, de manière instantanée. Ce processus se poursuit indéfiniment. On modélise la durée de vie d'une batterie par une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les durées de vie des différentes batteries sont toutes indépendantes entre elles.

On note T_1, la date du premier changement de batterie depuis la mise en service de la machine. De manière plus générale, pour tout entier n, on note T_n la date à laquelle la n-ième batterie s'épuise et est remplacée.

Soit t un réel positif. On note $N(t)$, le nombre de batteries épuisées depuis la mise en service de la machine jusqu'au temps t inclus.

(a) Soit n un entier non nul. Montrer que T_n est une variable aléatoire positive dont on donnera la densité.

(b) Pour tout entier non nul n, montrer que les événements $\{N(t) \geq n\}$ et $\{T_n \leq t\}$ sont identiques. On note leur probabilité p_n.

(c) Trouver une relation de récurrence entre les p_n.

(d) Pour tout entier n, calculer la probabilité de $\{N(t) = n\}$. En déduire la loi de $N(t)$ (on donnera son nom et la valeur des paramètres).

4. On suppose que λ, t et s sont des réels strictement positifs. Soient X et Y deux variables aléatoires positives indépendantes de densités respectives f_X et f_Y. On admettra que pour toute fonction bornée, g, du couple (X, Y),

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} g(x,y) f_X(x) dx\right] f_Y(y) dy.$$

(a) Soit S_n variable de densité f_n et τ une variable exponentielle de paramètre λ indépendante de S_n. En appliquant la formule ci-dessus à des fonctions indicatrices bien choisies, montrer que

$$\mathbb{P}(S_n + \tau > s + t \text{ et } S_n \leq s) = \frac{\lambda^n}{n!} s^n e^{-\lambda(s+t)}.$$

On notera la probabilité précédente q_n.

(b) En conservant la modélisation précédente sur les batteries, soit $N(s)$ le nombre de batteries épuisées jusqu'au temps s inclus. Soit Z la première date après s (non inclus) à laquelle une batterie est épuisée. Montrer que $\mathbb{P}(Z > t + s \text{ et } N(s) = n) = q_n$.

(c) En se servant des fonctions de queue, montrer que $Z - s$ est une variable exponentielle de paramètre λ et qu'elle est indépendante de $N(s)$.

(d) Montrer que $N(t+s) - N(s)$ est une variable de Poisson de paramètre λt et qu'elle est indépendante de $N(s)$.