J. 4772

UHC 154

SESSION 2001

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm - Lettres et Sciences Humaines - Cachan

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

Exercice I

On jette au hasard r jetons dans n boîtes ($n \geq 3$) de la façon suivante : chaque jeton a la même probabilité de tomber dans chacune des boîtes et on suppose que les jetons sont lancés indépendamment les uns des autres.

1. Soit A_i l'événement "la ième boîte n'a pas reçu de jeton". Calculer $P(A_i)$.
2. Soit N_n le nombre de boîtes n'ayant pas reçu de jeton. Calculer $E(N_n)$ (on pourra exprimer N_n en fonction des variables $\mathbf{1}_{A_i}$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ où $\mathbf{1}_{A_i}$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et vaut 1 si et seulement si l'événement A_i est réalisé).
3. Calculer $P(A_i \cap A_j)$ pour tout $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$ puis calculer $E(N_n^2)$. En déduire la variance $V(N_n)$ de N_n.
4. On considère ici un nombre variable n de boîtes et l'on fait dépendre r de n (on notera alors $r = r_n$). On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $r_n/n \to c$ lorsque n tend vers l'infini.
   (a) Calculer la limite de $E(N_n/n)$ lorsque n tend vers l'infini.
   (b) Calculer la limite de $V(N_n/n)$ lorsque n tend vers l'infini.
   (c) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que $\epsilon^2 \mathbf{1}_{|N_n/n - E(N_n/n)| \geq \epsilon} \leq (N_n/n - E(N_n/n))^2$. En déduire que $P(|N_n/n - E(N_n/n)| \geq \epsilon) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini. Quelle est la signification de ce résultat ?

Exercice II

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \mapsto (2x+3y, x+2y)$, et A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On définit $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 1\}$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 1\}$.

1. (a) L'application f est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
   (b) Montrer que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
2. Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On prend $(x_0, y_0) \in E$, et on définit la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n, y_n) = f((x_{n-1}, y_{n-1}))$.
   (a) Montrer que les éléments de cette suite appartiennent à E.
   (b) Verifier que $(1, 0) \in E$ et en déduire, dans $\mathbb{N}^2$, une infinité de solutions, que l'on explicitera, de l'équation $x^2 - 3y^2 = 1$.

Problème

Dans ce problème, on étudie un résultat de théorie des jeux du à Blackwell, avec une application à l'existence de partitions bien réparties sur l'ensemble des entiers.

Notations

Dans le problème, on notera $\mathbb{R}^d$, où d est un entier strictement positif, l'ensemble des d-uplets $u = (u(1), \cdots, u(d))$ de réels. Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$, on définit la longueur de u, notée $||u||$, par

$$||u|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} u(i)^2}.$$

De plus, pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^d$, on définit $\langle u, v\rangle$ par

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{d} u(i)v(i).$$

Enfin, une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ est dite bornée par $M \in \mathbb{R}_+$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n| \leq M$.

Préliminaire

Soient $(w_n)_{n\geq 1}$ et $(a_n)_{n\geq 1}$, deux suites de réels *positifs*, telles que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée par un réel $M \in \mathbb{R}_+$ et pour tout entier $n \geq 1$

$$w_{n+1} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot w_n + \frac{a_n}{(n+1)^2}. \tag{1}$$

On veut montrer, dans ce préliminaire, qu'alors la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Montrer le résultat dans le cas où la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est identiquement nulle.
2. Montrer que pour tout entier $k \geq 0$, on a
$$w_{k+1} \leq \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 w_1 + \frac{k}{(k+1)^2} M.$$
3. En déduire alors le résultat annoncé, i.e., $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Première partie

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels bornée par un réel $M \in \mathbb{R}_+$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

On suppose que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ satisfait la propriété suivante :

$$x_{n+1}\overline{x}_n \leq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

1. Montrer que la suite $(\overline{x}_n)_{n\geq 1}$ est bornée par M.

Tournez la page S.V.P.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|\overline{x}_{n+1}|^2 \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |\overline{x}_n|^2 + \frac{1}{(n+1)^2}|x_{n+1}|^2.$$
3. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \overline{x}_n = 0. \tag{3}$$
4. Donner un contre-exemple à la limite (3) lorsqu'on ne suppose plus que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée, la propriété (2) restant vérifiée.
5. Donner un autre contre-exemple lorsque la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ reste bornée mais que l'on ne suppose plus la propriété (2) vérifiée.

Deuxième partie

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et Γ la partie de $\mathbb{R}^d$ définie par
$$\Gamma = \{\ (x(1), \cdots, x(d)) \in \mathbb{R}^d \mid x(i) \leq 0,\ \forall i \in \{1, \cdots, d\}\ \}.$$
Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on note $P_\Gamma(u)$, le vecteur x de $\mathbb{R}^d$ défini par $x(i) = u(i)^-$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, où, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^- = a$ si $a \leq 0$ et $a^- = 0$ sinon.

1. Vérifier que pour tous vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^d$ et tout réel λ on a
   (a) $\langle u, u\rangle = ||u||^2$ et $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$,
   (b) $\langle u, v + \lambda w\rangle = \langle u, v\rangle + \lambda\langle u, w\rangle$,
   (c) $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\langle u, v\rangle$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^d$.
   (a) Montrer que pour tout $v \in \Gamma$, on a $||u - P_\Gamma(u)|| \leq ||u - v||$.
   (b) Montrer que $P_\Gamma(u)$ est l'unique élément $w \in \Gamma$ tel que $||u - w|| \leq ||u - v||$ pour tout $v \in \Gamma$. Comment peut-on interpréter $P_\Gamma(u)$ géométriquement ?
3. Montrer que l'on a $||u - P_\Gamma(u)|| \leq ||u||$.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de *vecteurs* de $\mathbb{R}^d$. On note, pour tout entier $n \geq 1$, $\overline{x}_n$ l'élément de $\mathbb{R}^d$, défini par
$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$
On suppose que la suite $(||x_n||)_{n\geq 1}$ est bornée et que pour tout entier $n \geq 1$
$$\langle \overline{x}_n - P_\Gamma(\overline{x}_n), x_{n+1} - P_\Gamma(\overline{x}_n)\rangle \leq 0 \tag{4}$$
Enfin, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = ||\overline{x}_n - P_\Gamma(\overline{x}_n)||^2$.

4. Montrer que
$$w_{n+1} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 w_n + \frac{1}{(n+1)^2}||x_{n+1} - P_\Gamma(\overline{x}_n)||^2.$$

5. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

6. On suppose ici, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n(1) + \cdots + x_n(d) = 0$. Prouver alors, que pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \overline{x}_n(i) = 0$.

Troisième partie

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{1, \cdots, d\}$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in \mathbb{R}^d$ par

$$v_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } c_n = i \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $i \in \{1, \cdots, d\}$. Soit $p \in \mathbb{R}^d$, dont toutes les coordonnées sont positives, et tel que $p(1) + \cdots + p(d) = 1$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = v_n - p$, et l'on désigne, comme dans les parties précédentes, par $\overline{x}_n$, la moyenne arithmétique des x_k pour $1 \leq k \leq n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{i=1}^{d} \overline{x}_n(i) = 0$ et qu'il existe $i_n \in \{1, \cdots, d\}$ tel que $\overline{x}_n(i_n) \leq 0$.

2. Montrer que l'on peut choisir la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ de telle sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$\langle \overline{x}_n - P_\Gamma(\overline{x}_n), x_{n+1} - P_\Gamma(\overline{x}_n)\rangle \leq 0,$$
avec P_Γ défini comme dans la deuxième partie.

3. En utilisant les résultats de la partie précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v_k(i) = p(i).$$

4. En déduire qu'il existe une famille $(A_i)_{1\leq i\leq d}$ de parties deux à deux disjointes de $\mathbb{N}$, telle que pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} |\{1, \cdots, n\} \cap A_i| = p(i),$$
où pour tout ensemble fini V, $|V|$ désigne le cardinal de V.