SESSION 2000

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm - Fontenay - Cachan

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages

Calculatrice autorisée

Tournez la page S.V.P.

Problème I

Dans ce problème, on étudie quelques propriétés des suites équidistribuées et l'on montre la loi de Benford sur les puissances de deux.

- $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur l'intervalle $[0,2\pi]$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ la partie entière de x, c'est à dire l'unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$.
- On désigne par $\Re z$ et $\Im z$ (resp $\Re f$ et $\Im f$) les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe z (resp les fonctions partie réelle et partie imaginaire d'une fonction f à valeurs complexes).
- On désigne par $\#E$ le cardinal, c'est à dire le nombre d'éléments, d'un ensemble fini E.

Partie I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0,2\pi]$. On note pour tout $\alpha \in]0,2\pi]$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$F_N(\alpha) = \frac{1}{N}\#\{n \in \mathbb{N}^*, n \leq N \text{ tel que } u_n \in [0,\alpha[\}.$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0,2\pi]$ si

$$\forall \alpha \in]0,2\pi]\ ,\ \lim_{N\to\infty} F_N(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi}\,.$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite équidistribuée dans $[0,2\pi]$.
   (a) Montrer que pour tous $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2\pi$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$ on a : $0 \leq F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1) \leq \frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{2\pi} + \epsilon$.
   (b) Montrer que pour tout $\alpha \in [0,2\pi]$, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{n \in \mathbb{N}^*, n \leq N \text{ tel que } u_n = \alpha\} = 0$ (on pourra commencer par étudier le cas $\alpha \in]0,2\pi[$).
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite équidistribuée dans $[0,2\pi]$.
   (a) On note I un intervalle ouvert inclus dans $[0,2\pi]$, et $f = \mathbf{1}_I$ la fonction caractéristique de I, définie par :

   $$\forall x \in [0,2\pi]\setminus I,\ f(x) = 0, \quad \forall x \in I,\ f(x) = 1\,.$$

   Déterminer $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n)$.
   (b) On appelle fonction en escalier sur $[0,2\pi]$ une fonction f pour laquelle il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $p+1$ réels $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = 2\pi$ tels que f est constante sur chaque intervalle de la forme $]a_i, a_{i+1}[$. Exprimer $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n)$ lorsque f est une fonction en escalier.

(c) Soit $f \in C([0,2\pi],\mathbb{R})$. On admettra que,pour tout $\epsilon > 0$, il existe g_ϵ fonction en escalier sur $[0,2\pi]$ telle que $\sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - g_\epsilon(x)| < \epsilon$. Montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\,.$$

3. Soit maintenant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[0,2\pi]$ telle que,pour toute fonction f continue sur $[0,2\pi]$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\,.$$

Montrer que cette suite est équidistribuée dans $[0,2\pi]$.

PARTIE II

Si f est une fonction continue à valeurs complexes définie sur $[0,2\pi]$, alors $\Re f$ et $\Im f$ sont continues sur cet intervalle, et on note

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} \Re f(t)dt + i\int_0^{2\pi} \Im f(t)dt\,.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2\pi(na - E(na))$.

1. Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikt)\,dt$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose a irrationnel, c'est à dire élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

(a) Exprimer $\sum_{n=1}^{N} \exp(iku_n)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Un polynôme trigonométrique est une fonction P définie sur $[0,2\pi]$ par:

$$P(t) = \sum_{k=-p}^{p} c_k \exp(ikt),$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ et les c_k $(k = -p,\cdots,p)$ sont $2p+1$ nombres complexes. Montrer que pour tout polynôme trigonométrique P, on a:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)dt\,.$$

(c) On admet que pour toute fonction $f \in C([0,2\pi],\mathbb{R})$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - P(x)| < \epsilon$. Montrer que ce polynôme P peut être supposé à valeurs réelles. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équidistribuée.

3. Le nombre a est maintenant élément de $\mathbb{Q}$: $a = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$. En étudiant $\sum_{n=1}^{N} \exp(iku_n)$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikt)\,dt$ pour une valeur de $k \in \mathbb{Z}$ bien choisie, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas équidistribuée.

Tournez la page S.V.P.

Partie III

1. Montrer qu'il existe une constante C (à déterminer) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $10^p \leq 2^n < 10^{p+1}$, avec $p \in \mathbb{N}$, alors $p = E(nC)$.
2. Soit $n \in N$. Montrer que le premier chiffre (à gauche) dans l'écriture décimale de 2^n est k, $k \in \{1, 2, \cdots, 9\}$, si et seulement si
$$\ln k \leq n \ln 2 - \ln(10) E\left(\frac{n \ln 2}{\ln 10}\right) < \ln(k+1).$$
3. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, 2, \cdots, 9\}$, on note $X_k(N)$ le nombre d'entiers $n \in \mathbb{N}^*, n \leq N$ tels que le premier chiffre dans l'écriture décimale de 2^n est k. Déterminer $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} X_k(N)$. (*On admettra ici que* $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} \notin \mathbb{Q}$.)
4. Quel sens peut-on donner à la phrase suivante: "Quand on choisit au hasard un nombre qui est une puissance de 2, il y a plus de chance que ce nombre commence par 1 que par 2, par 2 que par 3,..., par 8 que par 9" ?

Problème II

Dans ce problème, on cherche à décrire l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel laissant invariants tous les vecteurs d'un hyperplan donné.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension d avec $d \geq 2$. On considère un hyperplan H de E (i.e. un sous-espace vectoriel de E de dimension $d-1$) et u un endomorphisme de E tel que

$$u(h) = h, \text{ pour tout } h \in H,$$

i.e. laissant invariant tout élément de H.

Préliminaires

Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H.

1. Montrer qu'il existe un unique réel γ et un unique $h_a \in H$ tels que

$$u(a) = \gamma a + h_a.$$

2. Montrer que le réel γ ne dépend pas du choix de $a \notin H$.

Partie I

On suppose dans cette partie que $\gamma \neq 1$.

1. Montrer que γ est valeur propre de u. En déduire que u est diagonalisable et que l'espace propre associé à γ, noté E_γ, est de dimension 1.
2. Montrer que les seules droites vectorielles D (i.e. les seuls sous-espaces vectoriels de E de dimension 1) tels que $u(D) \subset D$ sont les droites contenues dans H ou la droite E_γ.

Soit V un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrer que si $E_\gamma \subset V$ ou $V \subset H$ alors $u(V) \subset V$.
4. On suppose dans cette question que $E_\gamma \not\subset V$ et $V \not\subset H$ et l'on désigne par D une droite vectorielle telle que $D \subset V$ et $D \not\subset H$.
   (a) Soit $F = E_\gamma + D$. Vérifier que $U(F) \subset F$.
   (b) Montrer que $u(V) \not\subset V$.
5. Déduire des questions précédentes, une condition nécessaire et suffisante pour que $u(V) \subset V$.

Partie II

On suppose dans cette partie que $\gamma = 1$.

1. Montrer qu'il existe une application linéaire, notée f, de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in H$.
2. Montrer qu'il existe un unique vecteur $c \in H$ tel que $u(x) = x + f(x)c$ pour tout $x \in E$.
3. Montrer que u est bijective et calculer son inverse.

Tournez la page S.V.P.

On suppose que u n'est pas l'application identité.

4. Décrire les valeurs propres et les espaces propres de u.
5. En choisissant une base adéquate de E, donner une forme matricielle la plus simple possible de u.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur un sous-espace V de E pour que $u(V) \subset V$.