UCF 262

J. 5821

SESSION DE 1999

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm-Cachan-Fontenay

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages

Calculatrice autorisée

Tournez la page S.V.P.

Problème I

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.

Notations et définitions

On définit un *graphe fini* G comme la donnée d'un couple (S, A) où S est un ensemble fini appelé ensemble des *sommets* du graphe, et A est une partie de l'ensemble

$$S^{(2)} = \{ \ \{s,t\} \mid s \in S, \ t \in S, \ s \neq t \ \}$$

des paires de sommets de S. L' ensemble A est appelé ensemble des *arêtes* du graphe G.

Par exemple, si $G = (S, A)$ où $S = \{a, b, c, d, e\}$ et $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{c, e\}\}$, alors G est le graphe dont les sommets sont a, b, c, d, e et pour lequel il existe une arête entre a et b, b et c, c et d, d et a, c et e à l'exclusion de toute autre. On pourra représenter ce graphe par le schéma:

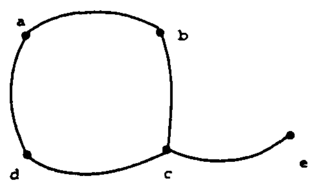

FIG. 1. *Représentation du graphe G*

Lorsque $A = \emptyset$, on dit que G n'a pas d'arêtes et lorsque $A = S^{(2)}$, on dit que G est un graphe complet.

On appelle *coloriage* de G à k couleurs, $k \in \mathbb{N}^*$, toute application $c : S \to \{1, \cdots, k\}$ (on suppose que l'on dispose de k couleurs différentes numérotées de 1 à k pour colorier les sommets du graphe et que $c(s)$ donne le numéro de la couleur du sommet s). On dit que c est un coloriage *propre* si deux sommets reliés par une arête n'ont pas la même couleur, c'est-à-dire si pour tous s et t dans S, $c(s) \neq c(t)$ lorsque $\{s, t\} \in A$.

On notera $P_G(k)$ le nombre de coloriages propres distincts à k couleurs de G et l'on appellera *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$, la plus petite valeur de k pour laquelle il existe un coloriage propre de G ayant ce nombre de couleurs

$$\chi(G) = \inf\{ \ k \in \mathbb{N}^* \mid P_G(k) \neq 0 \ \}.$$

Partie I

1. On pose $S = \{a, b, c\}$. Combien existe-t-il de graphes distincts dont les sommets sont donnés par S?
2. On considère $S = \{a, b, c\}$, $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$ et $G = (S, A)$.
   (a) Calculer le nombre chromatique $\chi(G)$ de G.
   (b) Calculer $P_G(k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3. On pose $S = \{a, b, c, d\}$, $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$ et on considère le graphe $G = (S, A)$ que l'on peut représenter par le schéma:

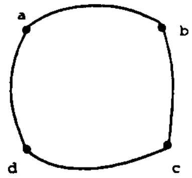

FIG. 2. *Représentation du graphe G*

   (a) Calculer le nombre chromatique $\chi(G)$.

   (b) Calculer $P_G(k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

4. On suppose maintenant que S contient p éléments avec $p \neq 0$. Calculer le cardinal de $S^{(2)}$, ensemble des paires de sommets. Combien existe-t-il de graphes distincts dont les sommets sont donnés par S?

5. Soit G un graphe fini quelconque ayant p sommets, $p \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que $P_G(k) \leq k^p$, $k \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer, en cherchant une minoration de $P_G(k)$ pour k assez grand, que $P_G(k)k^{-p}$ a une limite lorsque k tend vers $+\infty$, puis calculer cette limite.

PARTIE II

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 3$ et $S_p = \{s_1, \cdots, s_p\}$ un ensemble de p sommets distincts. On appelle graphe linéaire d'ordre p, le graphe $G_p = (S_p, A_p)$ où $A_p = \{\{s_i, s_{i+1}\} \mid i \in \{1, \cdots, p-1\}\}$. On appelle graphe cyclique d'ordre p le graphe $\widetilde{G}_p = (S_p, \widetilde{A}_p)$ où $\widetilde{A}_p = A_p \cup \{\{s_p, s_1\}\}$.

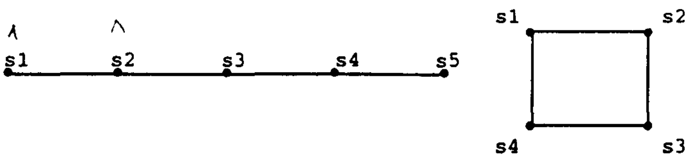

FIG. 3. *Représentation des graphes G_5 et $\widetilde{G}_4$*

1. Calculer $P_{G_p}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On note $P^*_{G_p}(k)$ le nombre de coloriages propres de G_p à k couleurs pour lesquels $c(s_1) = c(s_p)$.

   (a) Montrer que $P^*_{G_{p+1}}(k) = P_{G_p}(k) - P^*_{G_p}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Calculer la valeur de $P^*_{G_p}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Trouver la relation très simple qui lie $P_{\widetilde{G}_p}(k)$ et $P^*_{G_{p+1}}(k)$.

4. On veut montrer dans cette question que $P_G(k)$ est une expression polynomiale en k pour tout graphe fini G. On suppose donc ici que $G = (S, A)$ est un graphe quelconque ayant p sommets ($p \in \mathbb{N}^*$) et m arêtes ($m \in \mathbb{N}$).

   (a) Si $m = 0$, calculer $\chi(G)$ et $P_G(k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Tournez la page S.V.P.

On se place maintenant dans le cas $m > 0$. Il existe alors une arête $\{s, s'\} \in A$. On note $G' = (S, A')$ le graphe obtenu en retirant à G l' arête $\{s, s'\}$, c'est-à-dire pour lequel $A' = A \setminus \{\{s, s'\}\}$. On notera $P^*_{G'}(k)$ le nombre de coloriages propres c de G' à k couleurs tels que $c(s) = c(s')$.

(b) Montrer que $P_G(k) = P_{G'}(k) - P^*_{G'}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(c) Montrer qu'il existe un graphe G'' ayant $p - 1$ ~~sommets~~ et m'' arêtes avec $m'' \leq m$ tel que $P^*_{G'}(k) = P_{G''}(k)$.

(d) En déduire par récurrence sur la valeur de $p + m$ que, pour $p \geq 2$, $P_G(k)$ est un polynôme de degré p pour lequel

$$P_G(k) = k^p - mk^{p-1} + Q_G(k),$$

où Q_G est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p - 2$.

Partie III

Soit $G = (S, A)$ un graphe ayant p sommets ($p \geq 3$) et m arêtes. Pour chaque $s \in S$, on considère une variable aléatoire C_s à valeurs dans $\{1, \cdots, k\}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{1, \cdots, k\}$, c'est-à-dire $P(C_s = j) = \frac{1}{k}$ pour tout $j \in \{1, \cdots, k\}$ et $s \in S$.

1. On suppose que s, t et u sont 3 sommets distincts de S. Calculer $P(C_s \neq C_t)$ et $P(C_s \neq C_t \text{ et } C_t \neq C_u)$.
2. On note $N_G = \sum_{\{s,t\} \in A} \mathbf{1}_{C_s \neq C_t}$ où $\mathbf{1}_{C_s \neq C_t}$ est la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque $C_s \neq C_t$ et 0 sinon.

   Calculer $E(N_G)$, espérance de N_G, en fonction de k et m.
3. Montrer que la variance de N_G vaut
$$V(N_G) = m\frac{k-1}{k^2}.$$
4. Montrer que pour tout $k \geq m$,
$$P(N_G \leq m-1) \leq P\left(\left(N_G - \left(\frac{k-1}{k}\right)m\right)^2 \geq \left(\frac{k-m}{k}\right)^2\right),$$
puis montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ ~~tel que~~ pour tout $k \geq k_0$, on a
$$P(N_G \leq m-1) \leq \left(\frac{1+\epsilon}{k}\right)m.$$
(On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité suivante: si X est une variable aléatoire telle que $E(|X|)$ existe, alors $P(|X| \geq M) \leq \dfrac{E(|X|)}{M}$, pour tout réel M strictement positif.)
5. En déduire, sans utiliser les parties précédentes, que $P_G(k) \geq k^p - mk^{p-1} + f(k)k^{p-1}$ où f est une fonction telle que $\lim_{k \to +\infty} f(k) = 0$. Comparer ce résultat avec celui de la dernière question de la partie précédente.

Problème II

Dans ce problème, on considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue que l'on supposera dérivable sur $]0,1[$ et de dérivée bornée sur $]0,1[$. Soient $p \in [0,1]$, n un entier strictement positif et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi B_p, c'est-à-dire $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p$. On pose dans la suite,

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. (a) Montrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M_0.$$

   (b) Montrer qu'il existe un réel positif M_1 tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M_1 |x-y|.$$

   (c) En déduire que, pour tout α réel strictement positif et tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M_0 \frac{(x-y)^2}{\alpha^2} + M_1\alpha.$$

2. On note $V(X_1)$ la variance de X_1. Montrer que

$$\left| E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(p)\right| \leq \frac{M_0 V(X_1)}{n\alpha^2} + M_1\alpha.$$

3. On note $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \frac{A}{x^2} + Bx$ où A et B sont deux constantes réelles strictement positives. Montrer que g atteint son minimum en un point x^* que l'on calculera, puis donner la valeur de ce minimum.

4. Déduire que

$$\left| E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(p)\right| \leq 3\left(\frac{M_1^2 M_0 p(1-p)}{4n}\right)^{1/3}.$$

5. Montrer que $E(f(\frac{S_n}{n})) = Q_n(p)$ où Q_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

6. Montrer l'existence, pour tout $\epsilon > 0$, d'un polynôme R tel que pour tout $p \in [0,1]$, $|f(p) - R(p)| \leq \epsilon$ et montrer que l'on peut supposer

$$\deg R < \frac{27 M_0 M_1^2}{16\epsilon^3} + 1.$$