Sujet commun : ENS Ulm, Cachan et Fontenay-Saint-Cloud

DURÉE : 4 heures

1er Problème

Les parties I), II), III), IV), V) 1), 2) peuvent se traiter de manière indépendante.

I) Soit $\lambda > 0$ et $g_* : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $g_*(t) = \lambda e^t$. Soit G_* la primitive de g_* définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $G_*(0) = 0$.

1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par g_*: $\{g_*(t)\,; t \in \mathbb{R}\}$?

2) Pour a fixé, étudier les fonctions $t \longmapsto at - G_*(t)$, définies sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $a \in]0, \infty[$.

a) Calculer

$$H_*(a) = \max_{t\in\mathbb{R}}(at - G_*(t))$$

Montrer que le maximum est atteint pour un $t > 0$ si et seulement si $a > \lambda$.

b) Calculer $H_*(\lambda)$ et étudier le comportement de $H_*(a)$ lorsque $a \to 0+$.

4) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$G_*(t) = \max_{a\in]0,\infty[}(ta - H_*(a))$$

II) E désigne l'ensemble des fonctions $G : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et telles que la dérivée première $g = G'$ vérifie:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \quad g \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$

1) Montrer que pour $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha G + \beta \in E \text{ si } G \in E$$

2) Pour $G \in E$, on définit la fonction H sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$H(a) = \max_{t\in\mathbb{R}_+^*}(at - G(t))$$

a) Après avoir justifié l'existence de g^{-1}, application réciproque de g sur $\mathbb{R}_+^*$, exprimer H à l'aide de G et de g^{-1}.

b) Montrer que $H \in E$.

On désigne par A l'application de E dans E définie par $H = A(G)$.

3) Pour $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $G \in E$, soit $\hat{H} = A(\alpha G + \beta)$. Exprimer $\hat{H}(a)$ pour $a > 0$ en fonction de α, β et de la fonction $H = A(G)$.

4) Pour $p > 1$, on pose $G_p(t) = \dfrac{t^p}{p}$. Montrer que $G_p \in E$ et que $A(G_p) = G_q$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Calculer $A(A(G_p))$.

5) Calculer $A(A(G))$ pour $G \in E$.

6) A est-elle injective? surjective?

III) On considère dans cette question la fonction $G_0(t) = \log \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ de dérivée g_0, définie sur $\mathbb{R}$.
1) Montrer que G_0 n'est pas un élément de E.
2) Soit $|a| < 1$. Montrer que

$$H_0(a) = \max_{t\in\mathbb{R}}(at - G_0(t))$$

est bien défini et que la fonction $a \longmapsto H_0(a)$ est dérivable sur $]-1,1[$.
3) Montrer que H_0 se prolonge par continuité sur $[-1,1]$. Quelles sont alors les valeurs de $H_0(-1)$ et de $H_0(1)$?

IV) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, soit pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

1) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)e^{sk}$ est convergente pour tout $s \in \mathbb{R}$.
Calculer sa somme $\phi(s)$. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$E[e^{sX}] = \phi(s)$$

2) En utilisant la relation

$$(X_1 + X_2 = k) = \bigcup_{h=0}^{k} [(X_1 = h) \cap (X_2 = k-h)],$$

calculer la loi de $X_1 + X_2$ avec X_1, X_2 variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1, λ_2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson de paramètre λ. Calculer la loi de $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
3) Déduire de 1) et 2) que pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$E[e^{sS_n}] = \phi^n(s)$$

V) Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série de terme général
$u_n = f(n)P(X = n)$ soit convergente.
1) Montrer que la série de terme général $|f(n)|\, P(X = n)$ est aussi convergente. Montrer que $E[f(X)]$ est bien définie.
2) Montrer que si de plus f est positive, alors pour tout $M > 0$, on a

$$E\,[f(X)] \geq f(M)P(X > M)$$

3) En déduire que pour $s > 0$ et $a > 0$, S_n étant la variable aléatoire introduite au IV) 2), on a

$$P(S_n > na) \leq \phi^n(s)e^{-nas}$$

4) En déduire que pour $a > \lambda$, on a

$$P(S_n > na) \leq e^{-nH_*(a)},$$

où H_* est la fonction définie dans la partie I.

5) Par analogie avec **2)**, montrer que si f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et positive, alors pour tout $M > 0$, on a

$$E\left[f(X)\right] \geq f(M)P(X < M)$$

6) Montrer que pour $\varepsilon > 0$, on a

$$P(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| > \varepsilon) \leq e^{-nH_*(\lambda+\varepsilon)} + e^{-nH_*(\lambda-\varepsilon)}$$

7) En déduire la loi faible des grands nombres pour un échantillon de la loi de Poisson.

2ème Problème

Les parties I), II), III) peuvent se traiter de manière indépendante.
Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I) Soit

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où λ est un paramètre réel.

1) Pour quelles valeurs de λ la matrice A_λ est-elle inversible?

2) Soit V le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.

a) Etudier, suivant les valeurs de λ, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{V, A_\lambda V, A_\lambda^2 V\}$, puis celle du sous-espace engendré par $\{V, A_\lambda V, ..., A_\lambda^k V\}$ pour $k \geq 2$.

b) Même questions lorsque V est le vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et V un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ donné par ses coordonnées dans la base canonique. On note C l'élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont (V, AV, A^2V).

1) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{V, AV, ..., A^kV\}$ pour $k \geq 2$ lorsque :

a) V est un vecteur propre de A.
b) C est inversible.
c) C n'est pas inversible.
2) La propriété "A est inversible" implique t-elle la propriété "C est inversible"?
3) La propriété "C est inversible" implique t-elle la propriété "A est inversible"?

III) Dans toute cette partie, V est un vecteur fixé non nul de $\mathbb{R}^3$ et A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
1) Soit

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et X, Y, Z les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$X = AY + u_1V, \qquad Y = AZ + u_2V, \qquad Z = u_3V.$$

Calculer X en fonction de U et de V. On pose $X = \widetilde{C}(U)$.
Montrer que l'application $\widetilde{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est un automorphisme si et seulement si la matrice C est inversible.
2) Dans la suite, on choisit le vecteur V tel que la matrice C soit inversible.
a) Calculer $V_1 = C^{-1}V$ et $V_2 = C^{-1}AV$.
b) Montrer que $A_1 = C^{-1}AC$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

pour des nombres réels α, β, γ convenables que l'on ne calculera pas.
c) Montrer que les matrices $(A - sI)$ et $(A_1 - sI)$ sont semblables pour tout $s \in \mathbb{R}$. En déduire que A et A_1 ont les mêmes valeurs propres.
d) On suppose dans cette question que A admet $-1, 1, 2$ pour valeurs propres et on pose encore $A_1 = C^{-1}AC$.
Montrer que l'équation $s^3 - \gamma s^2 - \beta s - \alpha = 0$ admet $-1, 1, 2$ comme racines. (On pourra écrire que pour $s \in \{-1, 1, 2\}$, le système d'équations linéaires $A_1W = sW$, d'inconnue $W \in \mathbb{R}^3$, admet une solution $W \in \mathbb{R}^3, W \neq 0$.)
En déduire que α, β, γ, et donc A_1, ne dépendent pas du vecteur V

3ème Problème

1) Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$. Montrer la propriété suivante:

Pour tout triplet $(a, b, c) \in \{-1, +1\}^3$,
$$P(X = a \text{ et } Z = c | Y = b) = P(X = a | Y = b) P(Z = c | Y = b). \quad (1)$$

2) Comment construire la loi d'un triplet (X, Y, Z) de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, +1\}$, *non indépendantes*, telle que la propriété (1) ci-dessus soit satisfaite avec

$$P(X = a \text{ et } Y = b \text{ et } Z = c) > 0$$

pour tout triplet $(a, b, c) \in \{-1, +1\}^3$?
On pourra par exemple choisir la même expression pour les lois conditionnelles de X sachant $Y = b$ et de Z sachant $Y = b$.