# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

## EXERCICE I

Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(n, \theta)$ et $(m, \theta)$, où $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ sont des entiers connus et où $\theta \in ]0, 1[$ est inconnu.

1. *a.* Que vaut l'espérance de X ? En déduire un estimateur de $\theta$ de la forme $f(\mathrm{X})$.

   *b.* Montrer qu'il existe un unique estimateur sans biais de $\theta$ de la forme $f(\mathrm{X})$.

2. On appelle mode d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{Z} = k) \geqslant \mathrm{P}(\mathrm{Z} = i)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

   *a.* Pour $k \in \{1, \ldots, m\}$, calculer :
$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k)}{\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k - 1)}.$$

   *b.* Déterminer le (ou les) mode(s) de Y.

3. On cherche à prédire la valeur de Y à partir d'une observation $x$ de X. Proposer une valeur dans le cas où X et Y sont indépendantes ; proposer une valeur dans le cas où Y = X.

## EXERCICE II

*On rappelle la formule suivante : pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)).$$

1. *a.* Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer : $\displaystyle\int_0^\pi t \cos kt \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^\pi t^2 \cos kt \,\mathrm{d}t$.

   *b.* Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout entier $k \geqslant 1$, on ait :
$$\int_0^\pi (at + bt^2) \cos kt \,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$

2. Montrer que l'application $\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par les relations :
$$\begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{1}{2}\left(- t + \dfrac{t^2}{2\pi}\right)\dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \in ]0, \pi], \\[2ex] \varphi(0) = -1, \end{cases}$$
est continûment dérivable sur $[0, \pi]$, c'est-à-dire de classe $\mathrm{C}^1$.

3. *a.* Montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) \sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2n+1}{2}t - \sin\frac{t}{2}\right).$$

   *b.* Montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :
$$\left(- t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) = \varphi(t)\left(\sin\frac{2n+1}{2}t\right) + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi}.$$

   *c.* Montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \varphi(t)\left(\sin\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{6}$.

   *d.* Quelle est la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ ?

---

## EXERCICE III

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on notera $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $k$ à coefficients réels et $I_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la matrice identité.

*On rappelle que si $\lambda = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, est une valeur propre complexe non réelle de* $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, *il en est de même du conjugué $\bar{\lambda} = a - ib$ de $\lambda$.*

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $n \geqslant 1$ un entier.
   *a.* On suppose que $+1$ ou $-1$ est une valeur propre de M. Montrer que $+1$ est une valeur propre de $M^{2n}$.
   *b.* On suppose que M a une valeur propre complexe $\lambda$ non réelle. Montrer que M est diagonalisable dans l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes ; en déduire que $+1$ est une valeur propre de $M^{2n}$ si et seulement si $M^{2n} = I_2$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda$ pour que cette relation soit vérifiée.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $A = (a_{i,j}) \in M_{4n}(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

définie par les égalités :

– si $i \in \{2, \dots, 4n-1\}$ est pair,
$$a_{i,i-1} = -1, \quad a_{i,i+1} = +1, \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{i-1, i+1\};$$
– *si* $i \in \{2, \dots, 4n-1\}$ est impair,
$$a_{i,i-1} = +1, \quad a_{i,i+1} = -1, \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{i-1, i+1\};$$
– $a_{1,2} = -1, \quad a_{1,4n} = +1, \quad a_{1,j} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{2, 4n\};$
– $a_{4n,1} = +1, \quad a_{4n,4n-1} = -1, \quad a_{4n,j} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{1, 4n-1\}.$

   *a.* Pour toute valeur propre réelle $\mu$ de A, on notera $E_\mu \subset \mathbb{R}^{4n}$ l'espace propre associé. Montrer que $(x_1, \dots, x_{4n}) \in E_\mu$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, 2n\}$,
$$\begin{pmatrix} x_{2i+1} \\ x_{2i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1-\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2i-1} \\ x_{2i} \end{pmatrix}.$$
   *(Dans cette formule, on pose par convention $x_{4n+1} = x_1$ et $x_{4n+2} = x_2$.)*

   *b.* Pour tout réel $\mu$, on pose :
$$M_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1-\mu^2 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que le réel $\mu$ est une valeur propre de A si et seulement si $+1$ est une valeur propre de $M_\mu^{2n}$.

   *c.* Déterminer les valeurs propres réelles $\mu$ de A telles que $M_\mu$ ait une valeur propre complexe non réelle. Quelle est la dimension de $E_\mu$ ?
   *(On rappelle que* $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$.*)*

   *d.* Déterminer la (ou les) valeur(s) propre(s) réelle(s) $\mu$ de A telle(s) que $+1$ soit une valeur propre de $M_\mu$. Même question pour $-1$. Dans chacun des cas, indiquer la dimension de $E_\mu$.

   *e.* La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{4n}(\mathbb{R})$ ?