ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2011

12

Mathématiques

Option ULM BL

Jeudi 21 avril 2011 de 14h00 à 17h00

Durée : 3 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :
14h00 – 18h00

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 3 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

PROBLEME.

Soit f_n l'application définie sur l'ensemble $\mathsf{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels par la relation :

$$f_n(P) = Q$$
$$\text{avec } Q(X) = \frac{1}{2}[P(X+1) + P(X)].$$

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathsf{R}_n[X]$.
2. Soient P un élément du noyau de f_n et S et T les polynômes définis par :
$$S(X) = P(X) - P(0), T(X) = P(X) + P(0).$$
   a. Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n,
   $$P(n) = (-1)^n P(0)$$
   b. Démontrer que pour tout entier naturel k,
   $$S(2k) = 0, T(2k+1) = 0.$$
   c. En déduire que le noyau de f_n est réduit au vecteur nul et que f_n est un automorphisme de $\mathsf{R}_n[X]$.
3. Soit $(E_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ la famille de polynômes définie par :
$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\} \qquad E_k = f_n^{-1}(X^k).$$
   a. Justifier que la famille $(E_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathsf{R}_n[X]$.
   b. Prouver que :
      i. $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\} \qquad E_k(X+1) + E_k(X) = 2X^k.$
      ii. $E_0 = 1.$
      iii. Pour tout k de $\{1,2,\ldots,n\}$ E_k est de degré k et que $E_k(1) + E_k(0) = 0.$
      iv. Pour tout k de $\{1,2,\ldots,n\}$ le polynôme dérivé E_k' de E_k vérifie : $E_k' = k\,E_{k-1}.$
   c. Calculer explicitement les polynômes E_1, E_2, E_3, puis donner les valeurs de $E_1(0), E_2(0), E_3(0)$.
4. Montrer que :
$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\} \qquad E_k(1-X) = (-1)^k E_k(X).$$
   En déduire que pour tout entier naturel p non nul :
$$E_{2p}(0) = E_{2p}(1) = E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$
5. Utilisez la formule de Taylor pour prouver que :
$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(0) X^{n-k}.$$
6. En déduire l'expression explicite du polynôme E_4.
7. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$E_n(0) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E_k(0)$$
8. Donner l'expression explicite du polynôme E_5.

PROBLEME.

Indice de concentration d'une variable discrète.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète positive, définie sur un espace probabilisé (Ω, B, p), de fonction de répartition F_X, admettant une espérance $E(X)$ non nulle, d'univers image $X(\Omega) = \{x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}$, n étant un entier naturel non nul.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (Ou, Ov), pour tout entier i compris entre 1 et n, on note M_i les points de coordonnées (u_i, v_i) tels que

$$\begin{cases} u_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} p[X = x_k] = F_X(x_i) \\ v_i = \displaystyle\frac{1}{E(X)} \sum_{k=1}^{i} x_k p[X = x_k] \end{cases}$$

On appelle courbe de *Gini* de X, la ligne polygonale obtenue en joignant les points $O, M_1, M_2, \ldots, M_n$ et on appelle *Indice de concentration* le réel $I(X)$ égal à deux fois l'aire de la portion de plan comprise entre la diagonale du carré unité et la courbe de *Gini*.

On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule :

$$\text{Aire du trapèze} = \frac{(\text{Grande base} + \text{Petite base}).\text{hauteur}}{2}.$$

1. On suppose que X suit une loi de Bernouilli de paramètre p.
   a. Représenter la courbe de Gini de X.
   b. Montrer que son indice de concentration est égal à $1 - p$.
   c. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi de Bernouilli que X.
      i. Donner la loi de la variable $|X_1 - X_2|$.
      ii. Montrer que :
      $$I(X) = \frac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X)}$$
2. On suppose maintenant que X suit une loi uniforme d'univers image $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n\}$.
   a. Démontrer par récurrence que :
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   b. Exprimer, pour tout entier i compris entre 1 et n , les réels u_i et v_i en fonction de i et de n .
   c. Vérifier que pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$:
   $$v_{i+1} + v_i = \frac{2(i+1)^2}{n(n+1)}.$$
   d. En déduire que l'*Indice de concentration* de X est égal à :
   $$I(X) = \frac{n-1}{3n}.$$
   e. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme que X.
      i. Donner la loi de la variable $|X_1 - X_2|$.
      ii. Montrer que :
      $$I(X) = \frac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X)}.$$

Tournez la page s.v.p

Indice de concentration d'une variable exponentielle.

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f. On note F_X^{-1} l'application réciproque de la restriction de la fonction de répartition F_X de X aux réels positifs ou nuls.

On définit les fonctions Q_X et h_X par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,+\infty[& Q_X(x) = \dfrac{1}{E(X)} \displaystyle\int_0^x tf(t)dt \\ \forall x \in [0,1[& h_X(x) = Q_X(F_X^{-1}(x)) \end{cases}$$

1. Rappeler l'expression de la fonction de répartition de X.
2. Justifier l'existence de F_X^{-1} et montrer que :
$$\forall x \in [0,1[, \qquad F_X^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x).$$
3. Exprimer $Q_X(x)$ en fonction du réel $x \geqslant 0$.
4. En déduire l'expression de h_X en fonction du réel x.
5. Montrer que l'on peut prolonger h_X par continuité en 1. Le prolongement est-il dérivable en 1 ? Que dire de la demi-tangente à la représentation graphique de h_X au point 1.
6. Calculer la dérivée de h_X sur l'intervalle $[0,1[$. Dresser le tableau de variation de h_X.
7. Montrer que h_X est convexe sur $[0,1[$.
8. On appelle courbe de *Gini* de X, la représentation graphique de h_X relativement à un repère orthonormé (Ox, Oy). Donner son allure.
9. On appelle *Indice de concentration* de X, le réel $I(X)$ égal à deux fois l'aire de la portion de plan comprise entre la diagonale du carré unité et la courbe de *Gini*.
   a. Calculer $I(X)$.
   b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} Q_X(x)f(x)dx$ est convergente et que :
$$I(X) = 1 - 2\int_0^{+\infty} Q_X(x)f(x)dx.$$