1. PROBLEME.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E, différent de $2Id_E$ et différent de $-3Id_E$, vérifiant la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$(\mathcal{R}) : \qquad u \circ u + u - 6Id_E = 0 \text{ (endomorphisme nul).}$$

où Id_E représente l'identité de E.

1. Montrer que u est surjectif. En déduire que c'est un automorphisme de E et exprimer u^{-1} en fonction de Id_E et de u.

2. Dans l'espace vectoriel des endomorphismes de E, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par u et Id_E, c'est-à-dire :

$$F = Vect\,\{Id_E, u\}\,.$$

   a. Montrer que la famille (Id_E, u) est libre dans l'espace vectoriel des endomorphismes de E. En déduire la dimension de F.

   b. Prouver que les endomorphismes f de F vérifiant la relation $f \circ f = f$, différents de l'endomorphisme nul et de l'identité de E, sont les endomorphismes p et q définis par :

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{5}\,(2Id_E - u) \\ \\ q = \dfrac{1}{5}\,(3Id_E + u) \end{cases}$$

   c. Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

   d. Etablir que la famille (p, q) est une base de F.

   e. Déterminer les coordonnées de u et de u^{-1} dans cette base (p, q).

   f. Pour tout entier naturel k, non nul, exprimez p^k en fonction de p.

   g. Etablir que, pour tout entier naturel n, u^n peut s'écrire comme combinaison linéaire de p, q. Donner les coordonnées de u^n dans la base (p, q).

   h. Le résultat obtenu est-il encore valable pour tout entier relatif n ?

3. Application numérique.
   Dans la suite du problème $E = \mathbb{R}^3$, on note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice A :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -5 \\ 10 & 2 & -5 \\ 20 & 10 & -13 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

   a. Vérifier que u satisfait à la relation $\mathcal{R}$.

   b. Déterminer les valeurs propres possibles de A.

   c. La matrice A est-elle diagonalisable ?

   d. On note P et Q respectivement les matrices associées à p et q dans la base canonique de E.
   Ecrire ces matrices et en déduire la matrice A^n pour tout entier relatif n. Ecrire A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

2. PROBLEME.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] - \ln n, \quad K_n = \int_0^1 \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}dt, \quad L_n = \int_1^n \frac{(1-\frac{t}{n})^n}{t}dt.$$

On se propose de démontrer dans ce problème que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1-\exp(-t)-\exp(-\frac{1}{t})}{t}dt.$$

2.1. Etude de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer, en utilisant éventuellement le théorème des accroissements finis, que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. En déduire, par sommation, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
3. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone puis convergente. On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2.2. Deux inégalités.

Soit n un entier naturel non nul. On se propose d'établir les deux inégalités suivantes :

$$(\mathcal{R}_1). \quad \forall t \in [0,n], \qquad \exp(-t) - (1-\frac{t}{n})^n \geqslant 0.$$
$$(\mathcal{R}_2). \quad \forall t \in [0,n], \qquad \exp(-t) - (1-\frac{t}{n})^n \leqslant \frac{t^2}{n}\exp(-t).$$

1. Soit φ la fonction définie par l'expression suivante :
$$\forall u > -1, \qquad \varphi(u) = u - \ln(1+u)$$
Etudier les variations de φ puis démontrer l'inégalité $\mathcal{R}_1$.
2. Vérifier que l'inégalité $\mathcal{R}_2$ est trivialement satisfaite pour t dans l'intervalle $[\sqrt{n}, n]$.
3. Soit ψ la fonction définie par l'expression suivante :
$$\forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right[, \qquad \psi(t) = t + n\ln(1-\frac{t}{n}) - \ln(1-\frac{t^2}{n}).$$
Etudier les variations de ψ puis démontrer l'inégalité $\mathcal{R}_2$.

2.3. Etude de la convergence des suites $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On considère les deux intégrales K et L définies par :

$$K = \int_0^1 \frac{1-\exp(-t)}{t}dt, \quad L = \int_0^1 \frac{\exp(-\frac{1}{t})}{t}dt.$$

1. Justifier la convergence des intégrales K_n, K, L et I.
2. Utiliser les inégalités précédentes pour prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant K_n - K \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 t\exp(-t)dt.$$
En déduire la convergence de la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Utiliser les inégalités précédentes pour établir que pour tout entier naturel n non nul :
$$0 \leqslant \int_1^n \frac{\exp(-t)}{t}dt - L_n \leqslant \frac{1}{n}\int_1^n t\exp(-t)dt.$$
En déduire la convergence de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers L.

2.4. Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers l'intégrale I.

1. Vérifier que pour tout entier naturel k :

$$\int_0^1 (1-u)^k du = \frac{1}{k+1}.$$

2. Effectuer un changement de variable pour montrer que pour tout entier non nul :

$$u_n + \ln n = \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t} dt.$$

3. Etablir que pour tout entier non nul :

$$u_n = K_n - L_n.$$

4. Conclure en montrant que :

$$\int_0^1 \frac{1-\exp(-t)-\exp(-\frac{1}{t})}{t} dt = \gamma.$$