ecricome

banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles
escbordeaux/escmarseille/icnnancy/escreims/escrouen/esctoulouse

J. 1723

CONCOURS D'ADMISSION 2002

option lettres et sciences humaines
ULM BL

MATHÉMATIQUES

jeudi 23 mai 2002 de 14 h 00 à 17 h 00

durée : 3 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.
La composition dans une autre option que celle pour laquelle le candidat s'est inscrit est interdite.

L'énoncé comporte 4 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

1. PROBLEME.

On se propose ici d'étudier la nature de la suite réelle, définie par son premier terme $u_0 \neq 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln \frac{\exp u_n - 1}{u_n}$$

À cet effet, on introduit la fonction numérique f de la variable réelle x par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln \dfrac{\exp x - 1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

exp désigne ici la fonction exponentielle de base e.

1.1. Etude de la fonction f.

1. Prouver que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 1, de $f(x)$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Prouver que f est dérivable en 0 et donner la valeur du nombre dérivé de f en ce point.
5. Déterminer la fonction h continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\text{Pour } x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{h(x) \exp x}{x(\exp x - 1)}$$

6. Dresser le tableau de variations de h et déterminer son signe.
7. Dresser le tableau de variations de f et en déduire son signe.

1.2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant, celui de u_0.
2. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = f(-u_n)$$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
4. Justifier la convergence de la suite vers un réel l à préciser.
5. Montrer enfin que le rapport u_{n+1}/u_n admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

2. PROBLEME.

E_n désigne l'espace des polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel n.
$M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
$GL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
On considère l'application f_n qui, à tout élément P de E_n, associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = (X-1)P'(X) + P(X)$$

2.1. Diagonalisation de f_n.

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de E_n.
2. Déterminer l'image par f_n des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de E_n. Ecrire alors la matrice A_n de f_n relativement à $\mathcal{B}_n$.
3. En déduire les valeurs propres de f_n. L'endomorphisme f_n est-il diagonalisable ? Est-ce un automorphisme de E_n ?

2.2. Recherche des vecteurs propres de f_n.

Soit P un vecteur propre pour f_n, c'est-à-dire un élément non nul de E_n tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation :

$$f_n(P) = \lambda P$$

1. Soit $\lambda = 1$. Montrer que P est constant.
   En déduire les vecteurs propres associés à la valeur propre 1.
2. On suppose maintenant que $\lambda \neq 1$.

   a. Montrer que 1 est racine de P.

   b. Soit k l'entier non nul égal à l'ordre de multiplicité de la racine 1. Il existe donc un polynôme R tel que :

   $$P(X) = (X-1)^k R(X) \qquad \text{avec} \qquad R(1) \neq 0$$

   Montrer que :

   $$k = \lambda - 1$$

   et que R est constant.

   c. En déduire les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Tournez la page S.V.P.

2.3. Cas particulier $n = 2$.

Dans cette question seulement on suppose $n = 2$.

1. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$A_2 = PDP^{-1}$$

2. En déduire que :
$$A_2^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

2.4. Etude d'une chaîne de Markov.

On dispose de trois urnes U_1, U_2, U_3. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :
- Les tirages se font avec remise des boules.
- La première épreuve consiste à tirer au hasard une boule dans l'urne U_3.
- Si j est le numéro de la boule tirée à la $k^{ème}$ épreuve, $k \geqslant 1$, on tire une boule au hasard dans l'urne U_j à la $(k+1)^{ème}$ épreuve.
On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve.
Compte tenu des hypothèses qui précèdent, on convient de poser $X_0 = 3$.
On note alors M_k la matrice unicolonne définie par :
$$M_k = \begin{pmatrix} p[X_k = 1] \\ p[X_k = 2] \\ p[X_k = 3] \end{pmatrix}$$
où $p[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.

1. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que :
$$M_{k+1} = A_2^{-1} M_k$$

2. Les matrices D et P étant celles de la question 2.3.1, en déduire, par récurrence sur l'entier k, que :
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad M_k = P(D^{-1})^k P^{-1} M_0$$

3. Expliciter alors M_k, puis les probabilités $p[X_k = 1], p[X_k = 2], p[X_k = 3]$ en fonction de k. Déterminer les limites de ces probabilités lorsque k tend vers $+\infty$.

4. Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k, puis sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.