ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option lettres et sciences sociales

MATHÉMATIQUES

Année 2001

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 3 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

PROBLEME I

L'entier n étant strictement positif, on pose : $S_n = \sum\limits_{1}^{n} \frac{1}{k}$, $\quad a_n = S_n - \ln(n)$ et $b_n = a_{n+1} - a_n$.

1. (a) Montrer que pour tout réel $x > -1$, $\quad \ln(1+x) \leqslant x$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n > 0$, et pour tout réel $t \leqslant n$, $\quad (1 - \frac{t}{n})^n \leqslant e^{-t}$.

2. On veut montrer que pour tout t de $[0, n]$, $\quad (I) : 0 \leqslant e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}$.

   (a) Etudier les variations de la fonction $h : [0, \sqrt{n}] \to \mathbb{R}$ définie par :

   $$h(t) = t + n \ln(1 - \frac{t}{n}) - \ln(1 - \frac{t^2}{n}).$$

   (b) En déduire que les inégalités (I) sont vraies pour $t \in [0, \sqrt{n}[$.

   (c) Montrer qu'elles le sont encore sur $[\sqrt{n}, n]$.

3. On pose $I_n = \int\limits_0^n \frac{e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt$.

   (a) Justifier l'existence de cette intégrale.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

4. (a) Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_0^n (1 - \frac{t}{n})^k dt$ en fonction de S_n.

   (b) En utilisant une factorisation de $1 - (1 - \frac{t}{n})^n$ montrer que :

   $$J_n = \int_0^n \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt = S_n.$$

5. (a) Donner le développement limité en $\frac{1}{n}$, à l'ordre 2, de b_n, quand n tend vers l'infini; en déduire la nature de la série $\sum b_n$.

   (b) Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge; on désignera par α la limite, que l'on ne cherchera pas à calculer, de la suite $(a_n)_n$.

6. (a) Justifier l'existence des deux intégrales :

   $$K = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \qquad \text{et} \qquad L = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

   (b) En étudiant l'expression $J_n - I_n$, montrer que $K - L = \alpha$.

7. Prouver la convergence et exprimer la valeur de l'intégrale $M = \int\limits_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt$ en fonction de α.

8. (a) Pour $x > 0$, montrer que $\int\limits_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \alpha + \ln x + \int\limits_x^x \frac{e^{-t}}{t} dt$.

(b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\int\limits_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt+\ln x\right)=-\alpha$.

9. Après en avoir prouvé la convergence, calculer l'intégrale $N=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\ln t dt$.

10. Pour a et b strictement positifs, justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt \qquad \text{et} \qquad \int\limits_0^{1}\frac{t-1}{\ln t}dt.$$

PROBLEME II

Dans ce problème, n est un entier naturel et $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

I est la matrice unitaire de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et M est la matrice $\begin{pmatrix}-7 & 0 & -8\\ 4 & 1 & 4\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$, représentant l'endomorphisme m dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Calculer $A=\frac{1}{4}(M-I)$, puis A^2.
   (b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad M^n=I+u_nA$, u_n étant le terme général d'une suite réelle.
   (c) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n, puis en fonction de n; en déduire l'expression de M^n.

2. Soit J la matrice $J=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$; calculer J^2 puis J^n; montrer que J n'est pas inversible.

3. On considère l'ensemble E des matrices de la forme $aI+bJ$ où a et b sont deux réels quelconques.
   (a) Montrer que $M\in E$.
   (b) En déduire l'expression de M^n en fonction de I et de J; comparer au résultat obtenu précédemment.

4. (a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de l'endomorphisme j associé à J; en déduire que M est diagonalisable.
   (b) Donner la matrice P de passage de la base canonique à une base B dans laquelle la matrice de j est une matrice diagonale D.
   (c) Calculer D^n; retrouver alors M^n.