ECRICOME
Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

MATHEMATIQUES

Option lettres et sciences humaines
Ulm BL
Durée : 3 heures

Les deux problèmes sont indépendants

Problème 1

1. f étant une fonction réelle de la variable réelle, montrer que si

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x |f(t)| dt \text{ existe,}$$

alors

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x f(t) dt \text{ existe.}$$

On pourra, par exemple, utiliser le critère de Cauchy ou majorer

$$\int_{x'}^{x} f(t) dt$$

pour des valeurs convenablement choisies de x et x'.

2. α étant un réel strictement positif, montrer que

$$\int_1^x \frac{\cos t}{t^\alpha} dt = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \sin 1 + \alpha \int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} dt$$

En utilisant le résultat précédent, montrer que l'intégrale

$$\int_1^x \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$$

converge quand x tend vers l'infini.

3. On considère la fonction

$$f(x) = e^x \sin(x^2)$$

On veut savoir si les intégrales

$$\int_0^x e^{-t} f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^x e^{-t} f'(t) dt$$

convergent quand x tend vers plus l'infini.

a) Montrer que l'intégrale $\int_0^x e^{-t} f(t) dt$ peut s'écrire sous la forme

$$A + \int_1^{\sqrt{x}} \frac{k(t)}{t^\alpha} dt,$$

A étant une constante et k une fonction bornée ; conclure.

b) En utilisant une méthode analogue et les résultats précédents, conclure pour la convergence de

$$\int_0^x e^{-t} f'(t) dt.$$

4. a) g étant une fonction continue de la variable réelle telle que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = M$$

trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = g(x)$$

On pourra exprimer la solution générale sous forme d'intégrale.

b) • Montrer qu'on peut trouver 2 nombres X et x $(0 < X < x)$, tels que pour

$$\text{tout } \varepsilon > 0, \qquad \left| e^{-x} \int_X^x (g(t) - M) e^t dt \right| < \varepsilon$$

$$\text{et } \left| e^{-x} \int_X^x M e^t dt - M \right| < \varepsilon$$

• En déduire qu'on peut trouver 2 réels X et x $(0 < X < x)$ tels que,

$$\text{pour tout } \varepsilon' > 0, \quad \left| \int_X^x g(t) e^{-(x-t)} dt - M \right| < \varepsilon'$$

• En déduire que si y est solution de E, alors

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = M$$

5. a) h étant une fonction réelle admettant une dérivée continue, vérifier que

$$\int_0^x e^{-t} h'(t) dt = e^{-x} h(x) - h(0) + \int_0^x e^{-t} h(t) dt$$

b) On suppose que

$$\int_0^x e^{-t} h'(t) dt$$

a une limite finie L, quand x tend vers $+\infty$.

Déterminer la fonction g, continue, ayant une limite finie en $+\infty$, telle que

$$\int_0^x e^{-t} h(t) dt \qquad \text{soit solution de } E.$$

c) Montrer que l'existence de la limite en $+\infty$ de

$$\int_0^x e^{-t} h'(t) dt$$

entraîne celle de la limite en $+\infty$ de

$$\int_0^x e^{-t} h(t) dt \qquad \text{et de} \qquad e^{-x} h(x).$$

d) Si $\int_0^x e^{-t} h(t) dt$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$ en est-il de même pour

$$\int_0^x e^{-t} h'(t) dt \ ?$$

Problème 2

L'objet du problème est l'étude d'un certain type de suites récurrentes.
On notera U_n ou $U(n)$ le terme général de la suite $U=(U_n)_n$ et S l'espace vectoriel des suites à termes complexes.
On désigne, de plus, par S_p l'ensemble des suites à termes complexes U qui satisfont à la relation :
pour tout n de N,

$$U(n+p)=a_{p-1}U(n+p-1)+...+a_0U(n)$$

où p est un entier donné strictement positif et où a_0, a_{p-1} sont p nombres complexes donnés avec $a_{p-1}\,a_0 \neq 0$

1. Montrer que Sp est un C espace vectoriel et que toute suite U de Sp est parfaitement déterminée par la donnée de ses p premiers termes $U(0)$, $U(1)$, ..., $U(p-1)$.

2. Pour tout entier j de $[|0;p-1|]$, on considère les suites e^j de Sp définies par :

$$\begin{cases} e^j(i)=1 \text{ si } i=j \\ e^j(i)=0 \text{ si } i\neq j \end{cases} \text{pour } i \in [|o;p-1|]$$

Montrer que $B=\left(e^0, e^{'}, ..., e^{p-1}\right)$ est une base de Sp.

3. On considère l'application f de S dans S définie pour toute U par $[f(U)](n)=U(n+1)$
a) Montrer que f est un endomorphisme de S et que Sp est stable par f.
b) En désignant par f' la restriction de f à Sp, donner la matrice $M_{f'}$ de f' dans la base B.
c) Montrer que $M_{f'}$ est inversible et donner son inverse $M_{f'}^{-1}$.

4. Soit S_4 l'ensemble des suites à termes complexes vérifiant la relation $U(n+4)=4U(n+3)-3U(n+2)-4U(n+1)+4U(n)$

a) Donner la matrice de l'endomorphisme f' dans la base B définie ci-dessus. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme f'.

b) 1. Donner l'expression des suites géométriques de S_4 ; on désignera par q_1, q_2, q_3 leurs raisons par ordre croissant.

2. Montrer que la suite V définie par $V(n)=q_3^n(an+b)$ est une suite de S_4.

3. Donner alors l'expression des suites de S_4.