PROBLÈME 1

Partie 1 - Taux de panne d'une variable discrète

Pour toute variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la condition (H) :

$$(H) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X \geqslant n) > 0$$

on appelle **taux de panne associé à** X la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = \mathbb{P}\left(X = n \,|\, X \geqslant n\right)$$

(probabilité conditionnelle de l'événement $[X = n]$ sachant que $[X \geqslant n]$ est réalisé).

1. Montrer que pour tout entier n non nul :
$$x_n = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geqslant n)}$$
2. On suppose dans cette question que Y suit une loi géométrique de paramètre p. Déterminer alors le taux de panne associé à Y.
3. On suppose dans cette question que la loi de Z est donnée par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$
   (b) Vérifier que Z est une variable aléatoire, c'est-à-dire que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = n) = 1$$
   (c) La variable Z admet-elle une espérance ?

   (d) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$. Déterminer alors le taux de panne associé à Z.
4. Soient X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant (H), et (x_n) son taux de panne.

   (a) Montrer que :
$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$$
   (b) Exprimer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ à l'aide des éléments de la suite (x_k), et plus précisément montrer que :
$$p_n = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$$
   (c) Déterminer les lois des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant (H) et ayant un taux de panne constant.

Partie 2 - Taux de panne d'une variable à densité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On note S l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, qui possèdent une densité nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$ et qui vérifient la condition (R) :

$$(R) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \mathbb{P}(X > x) > 0$$

1. Soit X un élément de S. Montrer que X possède une unique densité nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Soit X un élément de S. On note F sa fonction de répartition et f sa densité.
   Pour tout x dans $\mathbb{R}^{+*}$, justifier l'existence de
   $$\phi(x) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{1}{h} \mathbb{P}_{(X>x)}(X \leqslant x+h) \right)$$
   et vérifier que :
   $$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$
   On appelle **taux de panne associé à** X la fonction φ ainsi définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt$ converge et que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \varphi(t)dt \right)$$
4. Soit deux réels α et β strictement positifs.
   (a) Déterminer la constante K en fonction de α et β pour que la fonction g définie par :
   $$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, & g(x) = \dfrac{K}{(1+\beta x)^{\alpha+1}} \\ \forall x \in \mathbb{R}^{-}, & g(x) = 0 \end{cases}$$
   soit une densité de probabilité.
   (b) Soit T une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant g pour densité. Montrer que T appartient à S, et calculer son taux de panne.
5. Soit Z une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que Z appartient à S, et calculer son taux de panne.
6. Réciproquement, soit U un élément de S. On suppose que son taux de panne est constant. Montrer que U suit une loi exponentielle.
7. Soit W un élément de S dont le taux de panne est la fonction h définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad h(x) = a\lambda^a x^{a-1}$$
   où a et λ sont des réels strictement positifs.
   Trouver la fonction de répartition F_W de W et donner une densité de W. Que trouve-t-on pour $a = 1$?

PROBLÈME 2

Partie 1 - Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2},0\right[\cup]0,+\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$ au voisinage de 0.
2. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
3. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
4. Prouver l'existence d'une fonction h telle que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2},0\right[\cup]0,+\infty[\,, \quad f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

   Étudier les variations de h, puis en déduire le tableau de variations de f.
5. Montrer que f s'annule en un unique point α (on admettra que $\alpha \simeq 1,26$).
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie 2 - Étude d'une suite convergente

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+2u_n) = g(u_n) \end{cases}$$

1. Vérifier que la suite (u_n) est strictement positive.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que vaut alors sa limite ℓ ?
3. On suppose que u_0 est dans l'intervalle $]0,\alpha]$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est dans l'intervalle $]0,\alpha]$
   (b) Puis, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone et convergente vers α.
   (c) Prouver, de manière analogue, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers α si on suppose u_0 dans l'intervalle $]\alpha,+\infty[$.
4. On pose $u_0 = 1$.
   (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)|u_n-\alpha|$$

   (b) En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
   (c) À partir de quel rang n est-on sûr que u_n représente une valeur approchée de α à 10^{-4} près ?

Partie 3 - Étude d'une primitive de f

On pose, pour x appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. Étudier les variations de F.
2. Montrer que $F(x)$ est équivalent à x pour x au voisinage de 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse $x = 0$.
3. Donner un équivalent de f au voisinage de $+\infty$. En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Donner un équivalent de f au voisinage de $-\frac{1}{2}$. En déduire l'existence de la limite de $F(x)$ quand x tend vers $-\frac{1}{2}^+$.
5. Le prolongement de F est-il dérivable à droite de $-\frac{1}{2}$?
6. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-0.5	-0.25	0.5	1	α	2	4	5
$F(x)$	-1.14	-0.33	0.3	0.43	0.45	0.37	-0.31	-0.80

   Donner l'allure de la représentation graphique de F. On placera en particulier les tangentes à la courbe aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$.