17.1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
Déterminer le rang de f, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

17.2 Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\varphi_a(\overrightarrow{e_1}) = a\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2},\ \varphi_a(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_2},\ \varphi_a(\overrightarrow{e_3}) = a\overrightarrow{e_3}$$

1. Ecrire la matrice de φ_a dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer suivant les valeurs de a le rang de φ_a, le noyau de φ_a et l'image de φ_a.

17.3 On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = X^2P''(X) - 2XP(X)$.

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le rang, le noyau et l'image de f.

17.4 Soit φ une application définie dans $\mathbb{R}_n[X]$ par, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = 2XP'(X) - P''(X)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et exprimer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$. Calculer les coordonnées de $\varphi(P)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de φ.

17.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM - MA$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

17.6 Soit $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M.

1. Soit $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$. Montrer que $(\overrightarrow{u})$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Soient $\overrightarrow{v} = (1, 0, -1)$ et $\overrightarrow{w} = (1, -1, 0)$. Calculer $f(\overrightarrow{v})$ et $f(\overrightarrow{w})$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner $mat_{\mathcal{B}'}(u)$
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(Id - f)$.

17.7 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

17.8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et on suppose qu'il existe $\overrightarrow{x_0} \in E$ tel que $u^{n-1}(\overrightarrow{x_0}) \neq \overrightarrow{0}$ et $u^n(\overrightarrow{x_0}) = \overrightarrow{0}$.
Montrer que $(\overrightarrow{x_0}, u(\overrightarrow{x_0}), u^2(\overrightarrow{x_0}), \ldots, u^{n-1}(\overrightarrow{x_0}))$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

17.9 Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts deux à deux. Soit f l'application définie par : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$.

1. Montrer que f est un isomorphisme.
2. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base can. de $\mathbb{R}^3$. Donner $f^{-1}(\overrightarrow{e_1})$, $f^{-1}(\overrightarrow{e_2})$, $f^{-1}(\overrightarrow{e_3})$.

17.10 Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On définit l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^4$ par $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_{i+1}}$ et $\varphi(\overrightarrow{e_4}) = \overrightarrow{e_1}$.

1. Montrer que φ est un automorphisme et donner $mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
2. Calculer φ^{-1} et en déduire la valeur de A^{-1}.