15.1 Déterminer une primitive de :

1. $x \mapsto e^{-3x+5}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x \mapsto \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

15.2 Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

15.3 Existe-t-il des réels a et b tels que $F(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$ soit une primitive de la fonction $x \mapsto e^x \cos x$.

15.4 Après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-t^2}dt$.
On cherchera pour cela deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.

15.5 Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2(x-1)}$ définie sur $]1, +\infty[$ et qui s'annule en 3.

15.6 Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\cos t}dt$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction F et montrer que F est dérivable sur son domaine de définition. Calculer sa dérivée.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $F(x) \leq 0$.
3. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leq e|x|$.
5. Etudier la parité de la fonction F.

15.7 Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
3. En remarquant que $\ln(2) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ pour tout réel $x > 0$, montrer que f admet $\ln(2)$ pour limite en 0.
4. Etudier les variations et la convexité de f. Etudier le signe de $f(x)$ sur son domaine de définition.
5. Tracer l'allure de la courbe de f.

15.8 Justifier que la fonction Arctan admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les calculer.

15.9 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$x \mapsto e^x \cos x, \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x^n}, n \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto x\mathrm{Arctan}(x), \quad (x^2+x+1)e^x$$

15.10 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer I_n.
4. En déduire la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$ en fonction de n.

15.11 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \displaystyle\int_t^1 x^{2p+1}\ln x dx$.

1. Sans calculer l'intégrale, justifier que f est continue sur $[0,1]$. Peut-on réaliser un prolongement par continuité en 0 ?
2. f est-elle dérivable sur $[0,1]$? Si oui, calculer l'expression de sa dérivée.
3. Calculer $f(t)$ pour $t \in (0,1]$

15.12 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. On posera $x = \sin t$.

15.13 Soit $I = \displaystyle\int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$. Calculer I. Vous utiliserez après l'avoir justifié, le changement de variable : $u = \sqrt{e^x - 1}$.

15.14 Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$. On pourra réaliser en le justifiant le changement de variable $u = \cos t$.

15.15 Justifier l'existence et calculer $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x \sin x}dx$. On posera $u = \sin x$.

15.16 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable.

On considère les deux intégrales $I_1 = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $I_2 = \displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt$

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2.
3. Calculer I_2 en fonction de I_1.
4. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1} et interpréter ce résultat géométriquement.

15.17 Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$.

15.18 Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\displaystyle\int_m^n E(x)dx$.

15.19 Soit P un polynôme tel que $\displaystyle\int_0^1 tP^2(t)dt = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

15.20 On pose $g(x) = (2x - 1)\displaystyle\int_{1/2}^x \frac{t^4 dt}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

15.21 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis étudier sa parité.
2. Démontrer que $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2x}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$

15.22 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x}dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$

15.23 Soit f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire le sens de variations de f.
3. Démontrer que $\forall x > 1, f(x) \geq \dfrac{x^3 - x}{3 \ln x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

15.24 Etudier les convergences des suites définies par :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k}$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n + 1)(n + 2)\cdots(2n)}$