**05.1** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$. Déterminer le domaine de définition $D_f$ de la fonction $f$, puis montrer que $f$ est impaire sur $D_f$.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on a $1 + e^x > 1$, donc le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction $f$ est donc bien définie sur $D_f = \mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^x-1)}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

La fonction $f$ est bien impaire.

**05.2** Etudier les axes et centres de symétrie des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2-5x-7}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) \text{ existe } \iff x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$$

Ainsi, le domaine de définition de $f_1$ est $D = ]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$
S'il y a une symétrie, les $x$ doivent être symétriques par rapport à 1.

Regardons donc $f_1(1+h)$ et $f_1(1-h)$ pour voir s'il y a une relation.

$$f_1(1-h) = \frac{(1-h)^2-5(1-h)-7}{(1-h)-1} = \frac{1-2h+h^2-5+5h-7}{-h} = \frac{h^2+3h-11}{-h} = \frac{-h^2-3h+11}{h}$$

$$f_1(1+h) = \frac{(1+h)^2-5(1+h)-7}{(1+h)-1} = \frac{1+2h+h^2-5-5h-7}{h} = \frac{h^2-3h-11}{h}$$

On a donc

$$f_1(1-h) + f_1(1+h) = -6$$

autrement dit, pour tout $h > 0$,

$$\frac{f_1(1-h)+f_1(1+h)}{2} = -3$$

Autrement dit, le point $(1, -3)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de $f_1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_2(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On a donc

$$f_2(x) + f_2(-x) = \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$$

autrement dit, pour tout $x > 0$,

$$\frac{f_2(x)+f_2(-x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, le point $(0, 1/2)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de $f_2$.

**05.3** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante sur $\mathbb{R}$ et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $a, b$ deux réels tels que $a < b$.
Supposons qu'on ait $f(a) \leqslant f(b)$. Alors, puisque $f \circ f$ est croissante, on aurait $f \circ f(f(a)) \leqslant f \circ f(f(b))$, soit $f \circ f \circ f(a) \leqslant f \circ f \circ f(b)$. Or, $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, puisque $a < b$, on devrait avoir $f \circ f \circ f(a) > f \circ f \circ f(b)$ : on arrive à une contradiction.
Ainsi l'hypothèse $f(a) \leqslant f(b)$ était nécessairement fausse ! On a donc obligatoirement $f(a) > f(b)$.
On a donc montré que si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. Autrement dit, $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

**05.4** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \leqslant 1 - \frac{1}{x^2}$$

Justifier que $f$ est majorée sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $1 - \frac{1}{x^2} \leqslant 1$.
On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \leqslant 1$$

On veut trouver un $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M$.
Prenons $M_0 = \max(f(0), 1)$, alors, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leqslant 1 \leqslant M_0$$

et aussi

$$f(0) \leqslant M_0$$

ainsi, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M_0$. Ainsi, $f$ est majorée.

**05.5** Soient les fonctions $f$ et $g$ définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-x}{1+x}, \quad g(x) = \frac{\cos(x)}{2+x}$$

Montrer que les fonctions $f$ et $g$ sont bornées.

Pour $f$, on peut regarder les variations de la fonction.
$f$ est un quotient de deux fonctions polynômes : c'est une fonction rationnelle. $f$ est donc bien dérivable puisque le dénominateur ne s'annule jamais sur $[0, +\infty[$. De plus,

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f'(x) = \frac{-(1+x) - (-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2} \leqslant 0$$

Ainsi, $f$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. On a facilement que $f(0) = 0$ et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Ainsi, $f$ est décroissante et va de $0$ à $-1$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ $\searrow$ | $-1$ |

Ainsi, en particulier, elle est minorée par $-1$ et majorée par $0$. Donc $f$ est bien bornée.

On sait que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. De plus, si $x \geqslant 0$, on a $2 + x \geqslant 2$, donc $0 \leqslant \dfrac{1}{2+x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, et donc $g$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

**05.6** Soit la fonction $f$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{x}{1+x}$.

1. Sur $[0, +\infty[$ la fonction $f$ admet-elle un maximum ? un minimum ?
2. Montrer que $f$ est bornée sur $[0, +\infty[$. Déterminer ses bornes inférieures et supérieures.

1. On a déjà tracé le tableau de variations de la fonction $f$ dans l'exercice 05.5. La fonction est décroissante sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad -1 \leqslant f(x) \leqslant 0$$

Ainsi, $0$ est un majorant de $f$ et $-1$ est un minorant de $f$. Puisque $f(0) = 0$, le majorant de $f$ est atteint : c'est un maximum pour $f$. Cependant, $f$ n'admet pas de minorant. En effet, $f$ va diminuer pour se rapprocher de $-1$ mais ne va jamais l'atteindre :

$$f(x) = -1 \iff= \frac{-x}{1+x} = -1 \iff -x = -x - 1 \iff -1 = 0 \ \text{ : impossible}$$

Ainsi, la fonction $f$ n'admet pas de minimum.
La borne supérieure de $f$ est son plus petit majorant, c'est donc ici le maximum qui est 1.
La borne supérieure de $f$ est son plus grand minorant, c'est donc ici $-1$ : c'est un minorant, et on ne peut pas en avoir de plus grand.

**05.7** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|2x + 1| + |1 - x| \leqslant 3$$

Essayons d'enlever les valeurs absolues.

$$1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$$

et

$$2x + 1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$$

Il faudra différencier en tout trois cas :

$$x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right], \qquad x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right], \qquad x \in [1, +\infty[$$

**1er cas :** Soit $x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$. Alors l'équation est équivalente à

$$-(2x+1)+(1-x) \leqslant 3 \iff -3x \leqslant 3 \iff\iff x \geqslant -1$$

Ainsi, sur l'intervalle $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$, les solutions sont

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left[1, -\frac{1}{2}\right]}$$

**2ème cas :** Soit $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Alors l'équation est équivalente à

$$(2x+1)+(1-x) \leqslant 3 \iff x+2 \leqslant 3 \iff x \leqslant 1 \ \text{ : tjs vrai}$$

Ainsi, sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$, les solutions sont

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]}$$

**3ème cas :** Soit $x \in [1, +\infty]$. Alors l'équation est équivalente à

$$(2x+1)-(1-x) \leqslant 3 \iff 3x \leqslant 3 \iff x \leqslant 1$$

Ainsi, sur l'intervalle $[1, +\infty]$, seul 1 est solution.

Finalement, l'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = [-1, 1]}$$

**05.8** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Ent}(x+1) = \text{Ent}(x)+1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $Y = \text{Ent}(x)+1$. Montrons que $Y = \text{Ent}(x+1)$, autrement dit il s'agit de montrer que $Y$ est un entier et que

$$Y \leqslant x+1 < Y+1$$

$Y = \text{Ent}(x)+1$, donc puisque $\text{Ent}(x)$ est un entier, on a bien $Y \in \mathbb{Z}$ également.
De plus, on sait que

$$\text{Ent}(x) \leqslant x < \text{Ent}(x)+1$$

$$\text{Ent}(x)+1 \leqslant x+1 < (\text{Ent}(x)+1)+1$$

autrement dit

$$Y \leqslant x+1 < Y+1$$

Ainsi, $Y$ est un entier vérifiant $Y \leqslant x+1 < Y+1$, par définition, c'est exactement la partie entière de $x+1$. Donc $Y = \text{Ent}(x+1)$.

On a donc montré que

$$\text{Ent}(x+1) = \text{Ent}(x)+1$$

**05.9** Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, préciser leur domaine de dérivabilité et calculer leur dérivée là où elle existe :

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2-5}}$
3. $h : x \mapsto \ln(\ln(|x|))$
4. $u : x \mapsto \ln^3(x)$
5. $v : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$
6. $w : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
7. $z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$f(x) \text{ existe } \iff 2x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$$
Le polynôme $2X^2 + 3X + 1$ admet comme racine évidente $-1$ et le produit des racines doit faire $\frac{1}{2}$ donc l'autre racine est $-\frac{1}{2}$. On sait qu'un polynôme de degré deux est du signe du coefficient dominant à l'extérieur des racines, on en déduit que :
$$f(x) \text{ existe } \iff 2x^2 + 3x + 1 \geqslant 0 \iff x \in ]-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{2}, +\infty[$$
   - La fonction $x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$ est :
     - dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$
     - à valeurs dans $]0, +\infty[$ sur ce domaine (on a enlevé $-1$ et $-1/2$)
   - La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

   Par composition, $f$ est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
$$\forall x \in ]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[,\ f(x) = \sqrt{u(x)} \qquad \text{avec } u(x) = 2x^2 + 3x + 1$$
Ainsi
$$\forall x \in ]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[, f'(x) = u'(x)\frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \boxed{\frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}}$$

2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2-5}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{aligned} g(x) \text{ existe } &\iff \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x^2-5} \geqslant 0 \\ x^2 - 5 \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x^2-5} \geqslant 0 \\ x \notin \sqrt{5}, -\sqrt{5} \end{cases} \\ &\iff x \in \left]-\sqrt{5}, -\frac{3}{2}\right] \cup \left]\sqrt{5}, +\infty\right[ \end{aligned}$$
   - La fonction $x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-5}$ est :

– dérivable sur $\left]-\sqrt{5},-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\sqrt{5},+\infty\right[$
– à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur ce domaine (on a bien enlevé $-3/2$)
• La fonction $t\mapsto\sqrt{t}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$
Par composition, $g$ est dérivable sur $\left]-\sqrt{5},-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\sqrt{5},+\infty\right[$.

$$\forall x\in\left]-\sqrt{5},-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\sqrt{5},+\infty\right[,\ g(x)=\sqrt{u(x)}\qquad\text{avec } u(x)=\frac{2x+3}{x^2-5}$$

Puisque $u(x)=\frac{v(x)}{w(x)}$ avec $v(x)=2x+3$ et $w(x)=x^2-5$, on a

$$u'(x)=\frac{v'(x)w(x)-v(x)w'(x)}{w(x)^2}=\frac{2(x^2-5)-(2x+3)2x}{(x^2-5)^2}=\frac{-2x^2-6x-10}{(x^2-5)^2}$$

Ainsi

$$\forall\left]-\sqrt{5},-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\sqrt{5},+\infty\right[,g'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{-x^2-3x-5}{(x^2-5)^2\sqrt{\frac{2x+3}{x^2-5}}}$$

3. $h:x\mapsto\ln(\ln(|x|))$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}h(x)\text{ existe }&\Longleftrightarrow\begin{cases}|x|>0\\ \ln(|x|)>0\end{cases}\\&\Longleftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ \ln(|x|)>\ln(1)\end{cases}\\&\Longleftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ |x|>1\end{cases}\\&\Longleftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{aligned}$$

• La fonction $x\mapsto|x|$ est :
– dérivable sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ (puisque 0 n'est pas dedans)
– à valeurs dans $]1,+\infty[$ sur ce domaine
• La fonction $t\mapsto\ln(t)$ est
– dérivable sur $]1,+\infty[$
– à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur ce domaine
• La fonction $u\mapsto\ln(u)$ est
– dérivable sur $]0,+\infty[$
Par composition, $g$ est dérivable sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

De plus,

$$\forall x\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[,\quad h(x)=\begin{cases}\ln(\ln(x)) & \text{si } x>1\\ \ln(\ln(-x)) & \text{si } x<1\end{cases}$$

*1er cas* : sur $]1,+\infty[$. Alors

$$\forall x>1,\ h(x)=\ln(\ln(x))=\ln(u(x))\quad\text{avec } u(x)=\ln(x)$$

donc

$$\forall x>1,\ h(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\boxed{\frac{1}{x\ln(x)}}$$

*2ème cas* : sur $]-\infty,-1[$. Alors

$$\forall x<1,\ h(x)=\ln(\ln(-x))=\ln(v(x))\quad\text{avec } v(x)=\ln(-x)$$

De plus, $v(x) = \ln(w(x))$ avec $w(x) = -x$, donc $v'(x) = \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Ainsi

$$\forall x < 1,\ h'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} = \boxed{\frac{1}{x\ln(-x)}}$$

4. $u : x \mapsto \ln^3(x)$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$u(x) \text{ existe } \iff \ln(x) \text{ existe } \iff x > 0$$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \ln^3(x) = \ln(x) \times \ln(x) \times \ln(x)$.
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc par produit, la fonction $u$ est bien dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0,\ u(x) = v(x)^3 \quad \text{avec } v(x) = \ln(x)$$

donc

$$\forall x > 0,\ u'(x) = v'(x) \times 3v(x)^2 = \boxed{\frac{3}{x}\ln^2(x)}$$

5. $v : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} v(x) \text{ existe } &\iff \begin{cases} \left|\dfrac{x}{x^2-1}\right| > 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \\ &\iff x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \end{aligned}$$

- La fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$ est :
  - dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ (fonction rationnelle de dénominateur ne s'annulant pas)
  - à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ sur ce domaine (on a enlevé 0)
- La fonction $t \mapsto |t|$ est
  - dérivable sur $\mathbb{R}^*$
  - à valeurs dans $]0, +\infty[$ sur ce domaine
- La fonction $u \mapsto \ln(u)$ est
  - dérivable sur $]0, +\infty[$

Par composition, $v$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

De plus,

$$\forall x \in D_v,\ v(x) = \ln\left|\frac{x}{x^2-1}\right| = \ln(|x|) - \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)$$

*1er cas :* $x \in ]-\infty, -1[$, alors $x < 0$, $x-1 < 0$ et $x+1 < 0$.

$$v(x) = \ln(-x) - \ln(-x+1) - \ln(-x-1)$$

et

$$v'(x) = \frac{-1}{-x} - \frac{-1}{-x+1} - \frac{-1}{-x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

*2ème cas :* $x \in ]-1, 0[$, alors $x < 0$, $x-1 < 0$ et $x+1 > 0$.

$$v(x) = \ln(-x) - \ln(-x+1) - \ln(x+1)$$

et
$$v'(x) = \frac{-1}{-x} - \frac{-1}{-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$
*3ème cas :* $x \in ]0,1[$, alors $x > 0$, $x-1 < 0$ et $x+1 > 0$.
$$v(x) = \ln(x) - \ln(-x+1) - \ln(x+1)$$
et
$$v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$
*4ème cas :* $x \in ]1,+\infty[$, alors $x > 0$, $x-1 > 0$ et $x+1 > 0$.
$$v(x) = \ln(x) - \ln(x-1) - \ln(x+1)$$
et
$$v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$
On remarque donc que dans tous les différents cas, on a :
$$\boxed{v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}$$

6. $w : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{aligned} w(x) \text{ existe } &\iff \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) \text{ existe} \\ &\iff \begin{cases} 1+x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\iff x \in ]-1,0[\cup]0,+\infty[ \end{aligned}$$

- La fonction $x \mapsto 1+x$ est :
  - dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ (polynôme)
  - à valeurs dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$ sur ce domaine
- La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est
  - dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$
  - à valeurs dans $\mathbb{R}$ sur ce domaine

Donc par composition, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est également dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ (fonction inverse), donc par produit, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Enfin la fonction $u \mapsto e^u$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $w$ est bien dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
$$\forall x \in ]-1,0[\cup]0,+\infty[,\ w(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \exp(u(x)) \quad \text{avec } u(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$
De plus, $u(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$ avec $v(x) = \ln(1+x)$ et $w(x) = x$. donc
$$u'(x) = \frac{v'(x)w(x) - v(w)w'(x)}{(w(x))^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2}$$

Ainsi

$$\forall x \in ]-1,0[\cup]0,+\infty[,\ w'(x) = u'(x)\exp(u(x)) = \frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{(x+1)x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x+1)\right)$$

7. $z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$z(x) \text{ existe } \iff \begin{cases} \ln(x) \text{ existe} \\ \sqrt{-\ln(x)} \text{ existe} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ -\ln(x) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \iff x \in ]0,1]$$

- La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est :
  - dérivable sur $]0,1[$
  - à valeurs dans $]-\infty,0[$ sur ce domaine
- La fonction $t \mapsto -t$ est
  - dérivable sur $]-\infty,0[$
  - à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur ce domaine
- La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est
  - dérivable sur $]0,+\infty[[$

Donc par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{-\ln(x)}$ est dérivable sur $]0,1[$. La fonction $x \mapsto x$ étant également dérivable sur $]0,1[$, on en déduit que par produit, la fonction $x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$ est bien dérivable sur $]0,1[$

$$\forall x \in ]0,1[,\ z(x) = a(x)b(x) \quad \text{avec } a(x) = x,\ b(x)\sqrt{-\ln(x)}$$

donc

$$\forall x \in ]0,1[,\ z(x) = a'(x)b(x) + a(x)b'(x)$$

Or, $b(x) = \sqrt{-\ln(x)} = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = -\ln(x)$, donc $b'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-1}{2x\sqrt{-\ln(x)}}$. Ainsi

$$\forall x \in ]0,1[,\ z'(x) = \sqrt{-\ln(x)} - \frac{1}{2\sqrt{-\ln(x)}}$$

**05.10** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln\left(\sqrt{2x-3}\right) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x)$
2. $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$
3. $\ln(|2x+1|) \leqslant 1$

1. On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(*)\ : \ln\left(\sqrt{2x-3}\right) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x)$$

   Déjà les termes de l'équation n'ont de sens que si :

$$\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 6-x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < 6 \\ x > 0 \end{cases} \iff x \in \left]\frac{3}{2}, 6\right[$$

On résout donc uniquement dans l'intervalle $\boxed{D = \left]\frac{3}{2}, 6\right[}$

Alors pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned}
(*) &\iff \ln\left(\sqrt{2x-3}\right) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x) = 0 \\
&\iff \ln\left(\sqrt{2x-3}\right) - \ln(6-x) + \ln(\sqrt{x}) = 0 \\
&\iff \ln\left(\frac{\sqrt{2x-3}\sqrt{x}}{6-x}\right) = 0 \\
&\iff \frac{\sqrt{2x-3}\sqrt{x}}{6-x} = 1 \\
&\iff \sqrt{(2x-3)x} = (6-x) \\
&\iff x(2x-3) = 36 - 12x + x^2 \\
&\iff 2x^2 - 3x = 36 - 12x + x^2 \\
&\iff x^2 + 9x - 36 = 0
\end{aligned}$$

$\Delta = 81 + 4 \times 36 = 81 + 144 = 225$. Donc l'équation $x^2 + 9x - 36 = 0$ admet deux solutions qui sont $x_1 = \frac{-9-15}{2} = -12$ et $x_2 = \frac{-9+15}{2} = 3$. Or, sur ces deux solutions, seule $x_2$ appartient à l'ensemble $D$ de résolution.
L'équation $(*)$ n'a donc qu'une solution :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$$

2. $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$ Puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$, $e^y > 0$, il n'y a pas de problème de définition. On peut donc résoudre sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(*) &\iff e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0 \\
&\iff e^{2x}e^{-1} - e^{x+1} - 2e^3 = 0 \\
&\iff e^{-1}(e^x)^2 - e(e^x) - 2e^3 = 0 \\
&\iff e^{-1}X^2 - eX - 2e^3 = 0 \qquad \text{avec } X = e^x
\end{aligned}$$

$\Delta = (-e)^2 + 8e^3e^-1 = e^2 + 8e^2 = 10e^2$.
L'équation en $X$ admet donc deux solutions qui sont : $X_1 = \frac{e+2e\sqrt{5}}{2\frac{1}{e}} = e^2\left(\frac{1}{2} + \sqrt{5}\right)$ et $X_2 = e^2\left(\frac{1}{2} - \sqrt{5}\right)$.
Alors, on résout les équations $e^x = X_1$ et $e^x = X_2$. La deuxième est impossible puisque $X^2 < 0$ et qu'on doit avoir $e^x > 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
(*) &\iff e^x = e^2\left(\frac{1}{2} + \sqrt{5}\right) \\
&\iff x = \ln\left(e^2\left(\frac{1}{2} + \sqrt{5}\right)\right) \\
&\iff x = 2 + \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$

L'équation n'admet donc qu'une solution :

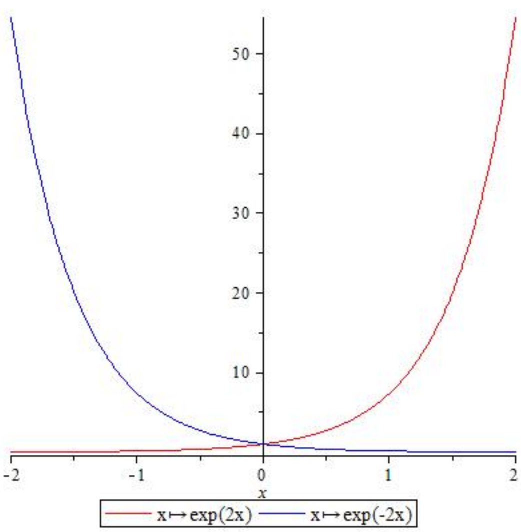
$$\mathcal{S} = \left\{2 + \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{5}\right)\right\}$$

3. $(*) : \ln(|2x+1|) \leqslant 1$

   L'équation n'a de sens que $|2x+1| > 0$, autrement dit, si $2x+1 \neq 0$, autrement dit si $x \neq -\frac{1}{2}$. On résout donc sur
$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$$
   Alors
$$\begin{aligned}(*) &\iff \ln(|2x+1|) \leqslant 1\\ &\iff \ln(|2x+1|) \leqslant \ln(e)\\ &\iff |2x+1| \leqslant e\\ &\iff -e \leqslant 2x+1 \leqslant e\\ &\iff -e-1 \leqslant 2x \leqslant e-1\\ &\iff \frac{-1-e}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+e}{2}\end{aligned}$$
   Ainsi, puisqu'on doit enlever $-1/2$ (qui n'est pas dans $D$), l'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$$\mathcal{S} = \left[\frac{-1-e}{2}, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]-\frac{1}{2}, \frac{-1+e}{2}\right]$$

**05.11** Soit $\alpha > 0$. Tracer l'allure de la courbe des fonctions
$$f : x \mapsto e^{\alpha x}$$
et
$$g : x \mapsto e^{-\alpha x}$$

Voici par exemple les courbes pour $\alpha = 2$ :



**05.12** Représenter sur un même graphique (utiliser des couleurs) les courbes des fonctions :

$$x \mapsto 1, x \mapsto x,\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^3,\ x \mapsto \sqrt{x},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$