Lycée des Sept Mares - Maurepas 2010-2011
TES1

QCM Dérivation - 20 Novembre 2010 (corrigé)

NOM Prénom :

<u>Une seule</u> bonne réponse par question.
Bonne réponse = +1, Mauvaise réponse = -0.5, Pas de réponse = +0.

Questions	Réponses
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2.$ Alors l'équation de la tangente en $x = 0$ est :	❒ $y = 2x - 3$ ☑ $y = 3x - 2$ ❒ $y = 3x^2 - 6x + 3$ ❒ $y = -2$
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}.$ Alors l'équation de la tangente en $x = 1$ est :	❒ $y = x + 1$ ❒ $y = -x + 1$ ❒ $y = x + 2$ ☑ $y = -x + 2$
3. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-1}{4-x}.$ Alors $f'(x) = \ldots$:	❒ $\frac{-4x+9}{(4-x)^2}$ ☑ $\frac{7}{(4-x)^2}$ ❒ $\frac{2x-1}{(4-x)^2}$ ❒ $\frac{9}{(4-x)^2}$
4. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-1}}.$ Alors $f'(x) = \ldots$:	☑ $\frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$ ❒ $\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$ ❒ $\frac{2x}{\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$ ❒ $\frac{-x}{\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}$
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^4.$ Alors $f'(x) = \ldots$:	☑ $(8x-16)(x^2-4x+3)^3$ ❒ $4(x^2-4x+3)^3$ ❒ $4(2x-4)^3$ ❒ $(2x-4)(x^2-4x+3)^4$

Questions	Réponses
1. Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = x^2\sqrt{1-2x}.$ Alors $f'(x) = \ldots$:	❒ $\frac{x^2}{2\sqrt{1-2x}}$ ❒ $\frac{-4x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ❒ $\frac{2x-3x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ☑ $\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$ Alors $f'(x) = \ldots$:	❒ $\frac{-1}{1-x}$ ❒ $\frac{-2}{(1-x)^3}$ ❒ $\frac{1}{1-x}$ ☑ $\frac{2}{(1-x)^3}$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = (\sqrt{x}+1)^2.$ Alors $f'(x) = \ldots$:	❒ $\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)$ ❒ $2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)$ ☑ $1 + \frac{\sqrt{x}}{x}$ ❒ $\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}.$ Alors $f'(x) = \ldots$:	☑ $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}$ ❒ $\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$ ❒ $\frac{2-2x^2}{x^2+1}$ ❒ $\frac{6x^2+2}{x^2+1}$
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4.$ Alors les points pour lesquels les tangentes à $\mathcal{C}_f$ sont horizontales ont pour abscisses :	☑ 1 et -2 ❒ -1 et 2 ❒ 1 et 2 ❒ -1 et -2

Correction détaillée - Colonne de Gauche

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. On a $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$. L'équation de la tangente en $x = 0$ est

$$\boxed{y = f'(0)(x - 0) + f(0)}$$

On calcule $f(0) - 2$ et $f'(0) = 3$. Donc la tangente a pour équation $\boxed{y = 3x - 2}$

---

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On a $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.
L'équation de la tangente en $x = 1$ est

$$\boxed{y = f'(1)(x - 1) + f(1)}$$

On calcule $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$. Donc la tangente a pour équation $y = -1(x - 1) + 1 = \boxed{-x + 2}$.

---

3. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{4 - x}$ est du type $\boxed{\dfrac{u(x)}{v(x)}}$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = 4 - x$. Alors

$$f'(x) = \boxed{\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}}$$

On a $u(x) = 2x - 1$, donc $u'(x) = 2$. On a $v(x) = 4 - x$, donc $v'(x) = -1$.
Donc

$$f'(x) = \frac{2(4 - x) - (2x - 1)(-1)}{(4 - x)^2} = \frac{8 - 2x + 2x - 1}{(4 - 2x)^2} = \boxed{\frac{7}{(4 - x)^2}}$$

---

4. On a $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x - 1}}$. On remarque que $f(x) = \boxed{\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$. Donc

$$f'(x) = \boxed{u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}}$$

On a $u(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$, du type $\dfrac{w(x)}{v(x)}$ avec $w(x) = 2x$ $v(x) = x - 1$. Donc $u'(x) = \dfrac{w'(x)v(x) - v'(x)w(x)}{v(x)^2}$ avec $v'(x) = 1$ et $w'(x) = 2$. On en déduit que $u'(x) = \dfrac{2(x - 1) - (2x)}{(x - 1)^2} = \dfrac{-2}{(x - 1)^2}$. Donc

$$f'(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x}{x - 1}}} = \boxed{\frac{-1}{(x - 1)^2\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}}$$

---

5. On a $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^4 = \boxed{(u(x))^4}$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 3$. Donc $f'(x) = \boxed{4u'(x)(u(x))^3}$.
Ici $u'(x) = 2x - 4$, donc $f'(x) = 4(2x - 4)(x^2 - 4x + 3)^3 = \boxed{(8x - 16)((x^2 - 4x + 3)^2}$.

Correction détaillée - Colonne de Droite

1. $f(x) = x^2\sqrt{1-2x} = \boxed{u(x)v(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{1-2x}$. Donc

$$f'(x) = \boxed{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

   On a $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$.
   On a $v(x) = \sqrt{1-2x} = \sqrt{w(x)}$ avec $w(x) = 1-2x$. Donc $v'(x) = w'(x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{w(x)}}$ avec $w'(x) = -2$. Ainsi, $v'(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$.
   Donc

$$f'(x) = 2x\sqrt{1-2x} + x^2 \times \left(\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}\right) = \frac{2x(1-2x) - x^2}{\sqrt{1-2x}} = \boxed{\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}}$$

---

2. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \boxed{\dfrac{1}{u(x)}}$ avec $u(x) = (1-x)^2$. Donc

$$f'(x) = \boxed{\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}}$$

   On a $u(x) = (1-x)^2 = (v(x))^2$ avec $v(x) = 1-x$. Donc $u'(x) = 2v'(x)v(x) = 2\times(-1)\times(1-x) = -2(1-x)$. Ainsi

$$f'(x) = \frac{-2(1-x)}{(1-x)^4} = \boxed{\frac{-2}{(1-x)^3}}$$

---

3. $f(x) = (\sqrt{x}+1)^2$. On remarque que $f(x)$ est du type $\boxed{(u(x))^2}$ avec $u(x) = \sqrt{x}+1$. Donc

$$f'(x) = \boxed{2u'(x)u(x)}$$

   On a $u(x) = \sqrt{x}+1$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   On a donc :

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x}+1) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \boxed{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}}$$

---

4. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. On remarque que $f(x)$ est du type $\boxed{\dfrac{u(x)}{v(x)}}$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = \sqrt{x^2+1}$. Donc

$$f'(x) = \boxed{\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}}$$

   On a $u(x) = 2x$, donc $u'(x) = 2$.
   On a $v(x) = \sqrt{x^2+1}$ du type $\sqrt{w(x)}$ avec $w(x) = x^2+1$, donc $v'(x) = w'(x)\dfrac{1}{2\sqrt{w(x)}} = 2x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
   On a $v(x) = x^2$, donc $v'(x) = 2x$.
   On a donc :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - 2x \times \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\dfrac{2(x^2+1) - 2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2 - 4x(x-1)}{2\sqrt{x-1}} \times \frac{1}{x^4} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}}$$

---

5. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$. Les points où la tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale ont pour abscisses les x tels que $f'(x) = 0$.
   Ici, $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$. On a $\Delta = 9$ et $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$. Donc les points à tangente horizontale ont pour abscisse $\boxed{1 \text{ et } -2}$.