08.1 Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z = (3+2i)(5+i) - (2-i)(1+i)$
2. $z_2 = \dfrac{1}{1+i} - 1$
3. $z_3 = i^n$ $(n \in \mathbb{N})$,
4. $z_4 = \dfrac{(2+i)^2}{1-3i}$
5. $z_5 = (i - \sqrt{2})^3$
6. $z_6 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{i+1} - 1}$

08.2 Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = 1 - i$
3. $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$
4. $z_4 = -2$
5. $z_5 = -\sqrt{2}i$
6. $z_6 = (1 + \sqrt{3}i)^5$

08.3 Montrer que : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

08.4 Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le module de $z_1 = t^2 + 2it - 1$ et de $z_2 = \dfrac{1+it}{1-it}$, simplifiés au maximum.

08.5 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Mettre les complexes $z_1 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique.

08.6 Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

08.7 Soit a un réel strictement positif. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (donner les solutions sous forme algébrique et exponentielle) :

1. $z^2 = a$
2. $z^2 = -a$
3. $z^2 = ia$
4. $z^2 = -ia$
5. $z^2 = -a^2$
6. $z^2 = ia^2$

08.8 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $iz + 5i - 3 = (1-4i)z - 1$
2. $(iz+1)^2(2z - 3i) = 0$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^2 = 8 - 6i$
5. $z^2 = 2 - 3i\sqrt{5}$
6. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$
7. $z^2 - (1+5i)z - 6 + 7i = 0$
8. $(z+1)^4 + (z+1)^2 + 1 = 0$
9. $z^3 = i$
10. $z^3 = 4\sqrt{2}(1-i)$
11. $z^6 + 64 = 0$
12. $e^z = 2 + 2i$
13. $(z-2)^n = (z+2)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
14. $(z+i)^n = (z-i)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

08.9 Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $\sqrt{3} + i$.
En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

08.10 On note $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$.
On pose $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
Calculer $u + v$ et uv. En déduire u et v.