

**09.1** Pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  le système

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

admet-il dans  $\mathbb{R}^2$  :

- aucune solution ?
- une unique solution ?
- une infinité de solutions ?

**09.2** Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}^4$  les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z + t = 11 \\ 2x + y + z + t = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 14 \\ x - 2z = 14 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x - 4y + 2z + t = 1 \\ y + z - t = 0 \\ -3x + 6y - 3t = -1 \end{cases}$$

**09.3** Résoudre les systèmes suivants dans  $\mathbb{R}^3$ , en fonction du paramètre réel  $m$  :

$$1. \begin{cases} (1 + m^2)x - 3y = 5 \\ 4y + 3z = 8 \\ mz = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my - mz = m \\ x - y + mz = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 6y - 4z = 2 \\ -3x - 9y + 6z = m - 5 \end{cases}$$

**09.4** Résoudre le système suivant dans  $\mathbb{C}^3$ , en fonction des paramètres complexes  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = \lambda \\ -x + 2y + z = \mu \end{cases}$$

**09.5** Montrer qu'il existe un unique triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}, \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

**09.6** Montrer que l'application  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, x - 3y) \end{matrix}$  est surjective.

**09.7** Déterminer  $f(\mathbb{R}^2)$  et  $g(\mathbb{R}^3)$  où :

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, -x + 2y, 5x - y) \end{matrix}$$

$$g : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y + z, x - 2y) \end{matrix}$$