Le devoir comporte trois exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur deux pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

On considère pour tout $x \in]-1,1[$ le réel $F(x)$ donné par :

$$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[,\ F(x) = \int_x^{x^3} \frac{dt}{\ln(|t|)} \qquad \text{et} \qquad F(0) = 0.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $]0,1[$ et sur $]-1,0[$.
2. Montrer que F est impaire.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $F'(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{\ln(x)}$.
   En déduire les variations de F sur $]0,1[$.
4. Vérifier que pour $x \in]0,1[$, $\displaystyle\int_x^{x^3} \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(3)$.
5. Soit $x \in]0,1[$. Vérifier que pour $t \in [x^3, x]$, on a : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x^3}$, puis que :
$$\frac{F(x)}{x} \leqslant \ln(3) \leqslant \frac{F(x)}{x^3}$$
   (On fera attention au signe de $\ln(t)$ *et au sens des bornes des intégrales)*
6. En déduire un encadrement de $F(x)$ pour $x \in]0,1[$.
7. La fonction F est-elle continue en 0 ? La fonction F est-elle prolongeable par continuité en 1 et en -1 ?
8. Dresser le tableau de variations complet de F sur $]-1,1[$ (ou sur $[-1,1]$ si cela est possible).

Exercice 2

1. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1,+\infty[$,
$$f_n(x) = x^n \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$
   (a) Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
   (b) Calculer $h_n(0)$ et en déduire le signe de h_n.
   (c) Justifier que f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (d) En déduire le tableau de variations de f_n sur $]-1,+\infty[$, en précisant les limites aux bornes. On distinguera pour cela les cas où n est pair ou impair.
2. On note pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
   (a) Montrer que $u_1 = \dfrac{1}{4}$.
   (On pourra remarquer que $\dfrac{x^2}{1+x} = x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$ *).*
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n+1}$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3. Soit $n \geqslant 1$ fixé.
   (a) Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geqslant 1$, montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$
   (c) Montrer finalement que pour tout $n \geqslant 1$:
$$u_n = \frac{\ln(2)}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right).$$

Exercice 3

Dans tout ce problème, n et p sont des entiers strictement positifs et on considère des matrices à coefficients réels.
On se propose d'étudier les **inverses généralisées de matrices**. Si A est une matrice de dimension $n \times p$ (n lignes et p colonnes), alors une inverse généralisée de A est une matrice B vérifiant

$$ABA = A$$

1. Pour que cette écriture ait un sens, quelle doit être la dimension de B ?

Dans la suite, on notera cette dimension $d_\ell \times d_c$.

Partie A - Des exemples

2. On pose $A = \lambda I_n$ avec I_n la matrice identité de taille n et $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de λ les inverses généralisées de A.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont des inverses généralisées de A ?

$$B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les inverses généralisées de A.

Partie B - Un peu de théorie

Dans toute cette partie, on admet l'existence d'une inverse généralisée B_0 de A.

5. On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que A est une matrice inversible. Montrer qu'alors il existe une unique inverse généralisée et la déterminer.
6. Soit N une matrice de même dimension que B_0 ($d_\ell \times d_c$).
   Montrer que si $NA = 0$ ou si $AN = 0$, alors $B_0 + N$ est aussi une inverse généralisée de A.
7. On note $\mathcal{S}_A = \{\text{matrices } B \ / \ ABA = A\}$.
   Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_A - B_0$ défini par :
   $$\mathcal{S}_A - B_0 = \{B - B_0 \ / \ B \in \mathcal{S}_A\}$$
   est un espace vectoriel.
8. On suppose que l'équation $AX = Y$ admet une solution $X_\mathcal{S}$.
   (a) Montrer qu'alors $X_0 = B_0 Y$ est également solution de l'équation.
   (b) En déduire que l'équation $AX = Y$ admet une solution si et seulement si $AB_0 Y = Y$.

Partie C - Un peu de diagonalisation

9. Soit M la matrice carrée diagonale suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Trouver toutes les inverses généralisées de M.
10. Montrer que toute matrice carrée diagonale admet une inverse généralisée.
11. Soit D une matrice carrée diagonale de taille n, B une inverse généralisée de D.
    (a) Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'une matrice carrée.
    (b) On suppose que X est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ **non nulle**. Montrer que X est un vecteur propre de DB. Quelle est la valeur propre associée ?
12. Donner la forme générale des inverses généralisées d'une matrice carrée diagonale.
13. Soit B_0 une inverse généralisée de D matrice carrée diagonale de taille n.
    (a) Rappeler la définition du rang d'une matrice.
    (b) À quoi correspond le rang d'une matrice carrée diagonale ?
    (c) Calculer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_D - B_0 = \{B - B_0 \ / \ DBD = D\}$ en fonction du rang de D.
14. Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
15. Déduire de ce qui précède que toute matrice A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une inverse généralisée et donner la forme générale des inverses généralisées de A en fonction des valeurs propres de A et de la matrice de passage P qui permet de diagonaliser.

Partie D - Application

Soit A la matrice carrée suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Calculer les valeurs propres de A.
17. A est-elle inversible ? diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
18. Diagonaliser A.
19. Déterminer l'ensemble des inverses généralisées de A.
20. L'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet-elle une solution ?