Le devoir comporte trois exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur une page. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
   (b) En remarquant que $\dfrac{x}{2-x} = \dfrac{2}{2-x} - 1$, étudier les variations de f sur D_f.
   (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que f est bijective de $I = [0, 2[$ sur $J = [0, +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble D des réels tels que :
$$e^x - e^{-x} > 0$$
2. On définit la fonction f par :
$$\forall x \in D,\ f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$$
Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble D.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.

Exercice 3

1. Soit h la fonction définie par :
$$h(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$
   (a) Déterminer le domaine de définition D_h de la fonction h.
   (b) Résoudre $h(x) = 0$
   (c) Résoudre $h(x) > 0$.
2. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$$
   (a) Justifier que le domaine de définition de f est $D_f =]0, 1]$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$, $\dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \leqslant 1$.
   Qu'en déduire pour le signe de $f(x)$?
   (c) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$
3. Montrer que pour tout réel x négatif,
$$0 < \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \leqslant 1$$
4. On note alors l'application :
$$g : \begin{array}{ccc}]-\infty, 0] & \longrightarrow &]0, 1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2e^x}{1 + e^{2x}} \end{array}$$
   (a) Montrer que pour tout réel x, $1 - \left(\dfrac{2e^x}{1 + e^{2x}}\right)^2 = \left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)^2$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f(g(x)) = x$.
   (c) De même, étudier le domaine de définition de $g \circ f$ et calculer $g(f(x))$ lorsque cela a un sens.
   (d) Que peut-on en conclure ?