Exercice 1

1. (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge et donner sa valeur.

   (b) Montrer que $\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$ converge et vaut $\frac{1}{4}$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+xe^t}dt$ converge.
   On note alors pour tout $x > 0$,
   $$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+xe^t}dt.$$

3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4. (a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Montrer plus précisément que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

5. (a) Justifier que pour $x \in]0,1[$, on a :
   $$f(x) \geqslant \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{t}{1+xe^t}dt \geqslant \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{te^{-t}}{2x}dt.$$

   (b) En déduire la limite de f au voisinage de 0.

6. Soit $x > 0$. En utilisant le changement de variable $u = xe^t$ que l'on justifiera, montrer que :
   $$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u) - \ln(x)}{u(1+u)}du,$$
   puis que :
   $$f(x) = \ln(x)\big(\ln(x) - \ln(1+x)\big) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}du.$$

7. En déduire que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
   Retrouver ainsi le sens de variations de f.