Exercice 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note :

$$E = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}$$

(Remarquons que E contient uniquement des matrices <u>colonnes</u>).
On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A et on définit alors :

$$G = Vect(C_1, C_2, C_3)$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Résoudre l'équation $AX = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

   En déduire une base de E et donner $\dim(E)$.
3. Déterminer la dimension de G.
   A-t-on $E \oplus G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
4. On note :

   $$H = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ A^2X = 0\}$$

   Sans calculer A^2, montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et montrer que $E \subset H$.
5. A-t-on $E = H$?