

## Calcul matriciel

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 10.1 L'ensemble des matrices

#### 10.1.1 Définitions

##### Définition 1

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle **matrice à coefficients dans  $\mathbb{K}$  à  $n$  lignes et  $p$  colonnes** tout tableau  $A$  de taille  $n \times p$  contenant des scalaires (des nombres) du corps  $\mathbb{K}$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & & a_{n,p} \end{pmatrix} = \left( a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

##### Remarque :

- Quand on note un terme de la matrice  $a_{i,j}$ ,
- le premier indice  $i$  désigne l'**indice ligne**
- le second indice  $j$  désigne l'**indice colonne**

##### Définition 2

On note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes,  $p$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des **matrices carrées** à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.  
(On dit qu'une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **carrée d'ordre  $n$** ).
- $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices à une ligne et  $p$  colonnes.  
On dit qu'une matrice de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$  est une **matrice ligne**.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et une colonne.  
On dit qu'une matrice de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est une **matrice colonne**.

**Remarque :**

Deux matrices sont égales si elles ont :

- le même nombre de lignes
- le même nombre de colonnes
- tous les coefficients pris deux à deux (sur la même ligne et la même colonne) sont égaux

**Exemples :**

**E1** – Une matrice carrée est dite **diagonale** si elle est carrée et si tous les termes qui ne sont pas situés sur la diagonale sont nuls :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$$

autrement dit, une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonale si  $\forall i \neq j, a_{i,j} = 0$ .

**E2** – Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** si tous les coefficients "en dessous" de la diagonale sont nuls, i.e. si  $\forall i > j, a_{i,j} = 0$ .

**E3** – Une matrice carrée est dite **triangulaire inférieure** si tous les coefficients "au-dessus" de la diagonale sont nuls, i.e. si  $\forall i < j, a_{i,j} = 0$ .

**E4** – CAS PARTICULIER : **Matrice nulle**.

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**E5** – CAS PARTICULIER : **matrice identité** (ou **matrice unité**) **d'ordre  $n$**  :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle ne contient que des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

## 10.1.2 Somme de matrices, Multiplication par un scalaire

### Définition 3

Soient  $A = \left( a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = \left( b_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

On définit alors la matrice somme  $A + B$  comme la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  où on additionne deux à deux les termes correspondants aux mêmes lignes et colonnes.

$$A + B = \left( a_{i,j} + b_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

**Exemple :**

**Remarques :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \sqrt{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ . Alors  $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 + \sqrt{2} \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

**R1** – On ne peut pas calculer la somme de deux matrices n'ayant pas le même nombre de lignes ou le même nombre de colonnes

**R2** – L'addition de matrices possède les propriétés suivantes :

- elle est **commutative** :  $A + B = B + A$
- elle est **associative** :  $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
- elle possède un **élément neutre** : la matrice nulle.  $A + 0 = 0 + A = A$
- chaque matrice possède un **opposé** qui est  $-A = \begin{pmatrix} -a_{i,j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

**Définition 4**

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{i,j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  un scalaire.

On définit alors la matrice  $\lambda A$  comme une matrice de même taille que  $A$  où on multiplie tous les coefficients de la matrice  $A$  par le scalaire  $\lambda$  :

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{i,j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

**Remarques :**

**R1** – On écrit  $\lambda A$  mais on n'écrit pas  $A\lambda$  : le coefficient toujours devant.

**R2** – Pour toute matrice  $A$ , on a  $0A = 0$

**R3** – Pour toute matrice  $A$ , on a  $1A = A$

**R4** – L'addition et la multiplication par un scalaire sont distributifs l'un sur l'autre :

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

**Définition 5**

Soient  $A = \begin{pmatrix} a_{i,j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = \begin{pmatrix} b_{i,j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires. Alors

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

est appelé une **combinaison linéaire de  $A$  et  $B$** .

Plus généralement, si  $A_1, \dots, A_k$  sont  $k$  matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et si  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ , alors la matrice  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$  est une **combinaison linéaire** de matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , i.e. une matrice obtenue par des sommes ou des multiplications par des scalaires.

### 10.1.3 Produit matriciel

#### Définition 6

Soient  $A = \left( a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B = \left( a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ , i.e. le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ .

On peut alors définir une matrice produit  $C = AB = \left( c_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  avec

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}}$$

#### Exemples :

$$\mathbf{E1} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{E2} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{E3} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{E4} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{E5} - \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{E6} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} =$$

#### Remarques :

**R1** – Si le produit  $AB$  existe, le produit  $BA$  peut ne pas exister.

**R2** – Le produit matriciel **n'est pas commutatif**. Autrement dit, même si  $AB$  et  $BA$  existent, on n'a pas forcément  $AB = BA$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc de manière générale  $\boxed{AB \neq BA}$ .

**R3** – Le produit matriciel est **associatif**. Si les produits ont bien un sens, on a :

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$$

**R4** – Le produit matriciel est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition :

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) \quad (B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$$

**R5** – Le produit matriciel possède des éléments neutres qui sont les matrices identités :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad I_n A = A I_p$$

**R6** – On a pour toutes matrices  $A$  et  $B$  telles que  $AB$  existe, et pour tout scalaire  $\lambda$

$$A \times (\lambda B) = (\lambda A) \times B = \lambda (A \times B)$$

**Exemple :**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On a :  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$  et  $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ .

On peut donc avoir  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$  et avoir  $AB = 0$  où  $0$  désigne la matrice nulle. On dit que **le produit matriciel n'est pas intègre**.

Par conséquent, il faudra faire attention :  $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

**10.1.4 Produits de matrices carrées****Exemples :**

**E1** – Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors

$$A0_n = 0_n A = 0_n \quad \text{et} \quad AI_n = I_n A = A$$

**E2** – Un produit de matrices diagonales reste une matrice diagonale. Plus précisément, si  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $D' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ , alors  $DD' = \text{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n) = D'D$ .

**E3** – Un produit de matrices triangulaires supérieures reste une matrice triangulaire supérieure.

**E4** – Un produit de matrices triangulaires inférieure reste une matrice triangulaire inférieure.

**Définition 7**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée.

Alors on définit les puissances de la matrice  $A$  par :

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}} = A^{k-1}A = AA^{k-1}$$

**Exemple :**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ .

On en déduit que  $\forall k \geq 3, A^k = 0$ . On dit que la matrice  $A$  est **nilpotente d'ordre 3**.

**Remarque :**

ATTENTION. En général  $\boxed{(AB)^k \neq A^k B^k}$ . On a  $(AB)^k = \underbrace{AB \times AB \times \cdots \times AB}_{k \text{ fois}}$

**Définition 8**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que **les matrices  $A$  et  $B$  commutent** si

$$AB = BA$$

**Remarques :**

**R1** – Si  $AB = BA$ , alors on a bien dans ce cas,  $(AB)^k = A^k B^k$ .

**R2** – La matrice identité d'ordre  $n$ ,  $I_n$  commute avec toutes les matrices carrées d'ordre  $n$ .

**R3** – Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  commute avec  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 9****Formule du binôme de Newton**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices qui commutent (i.e.  $AB = BA$ ). Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

**10.1.5 Transposée d'une matrice****Définition 10**

Soit  $\left( a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On définit la **matrice transposée de  $A$** , notée  ${}^t A$ , la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

où on transpose les lignes en colonnes de  $A$  et vice-versa :  ${}^t A = \left( a_{j,i} \right)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$ .

**Exemple :**

$${}^t \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Remarque :**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors :  ${}^t({}^t A) = A$ ,  ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$ ,  ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$ ,  ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$

**10.1.6 Matrices et systèmes linéaires****Définition 11**

Soit un système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On peut **représenter ce système matriciellement** par une équation du type

$$AX = B$$

avec les notations suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & & a_{n,p} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$

## 10.2 Matrices carrées inversibles

### 10.2.1 Définition

#### Définition 12

Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **inversible** s'il existe une matrice  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice  $B$  est alors notée  $A^{-1}$  et s'appelle **l'inverse de  $A$** .

L'ensemble des matrices inversibles de taille  $n$  est noté  $GL_n(\mathbb{K})$  appelé le **groupe linéaire des matrices inversibles**.

#### Remarques :

**R1** – Si une matrice  $A$  est inversible, son inverse est unique.

**R2** – Si une matrice  $A$  est inversible à droite (il existe  $B_1$  telle que  $AB_1 = I_n$ ), alors elle est inversible à gauche (il existe  $C_1$  telle que  $C_1A = I_n$ ).

De même, si une matrice est inversible à gauche, elle est inversible à droite également.

#### Exemples :

**E1** – Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible.

**E2** – La matrice  $I_n$  est inversible et  $I_n^{-1} = I_n$ .

**E3** – Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A^2 - 3A - I_n = 0$ . Alors, on a

$$A^2 - 3A - I_n = 0 \iff A^2 - 3A = I_n \iff A(A - 3I_n) = I_n$$

La matrice  $A$  est donc inversible à droite, donc inversible, et son inverse est

$$A^{-1} = A - 3I_n$$

#### Proposition 13

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $GL_n(\mathbb{K})$  (i.e. inversibles).

1. Si  $A$  est inversible, alors pour toutes matrices  $M, N$  de même taille :  $AM = AN \implies M = N$ .

2.  $A^{-1}$  est aussi inversible et on a :  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

3. Le produit  $AB$  est aussi inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

En particulier, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p$  est inversible et :

$$(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p = A^{-p}$$

4. Pour  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda A$  est inversible et on a :  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

5.  $A$  est inversible si et seulement si  ${}^tA$  est inversible, et dans ce cas,  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

## 10.2.2 Matrice inversible et système linéaire

### Théorème 14

Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible si et seulement si pour toute matrice  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  le système

$$AX = Y$$

d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est de Cramer :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = Y$$

Dans ce cas, on a

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

La résolution du système  $AX = Y$  permet de déterminer  $A^{-1}$ .

### Exemple :

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle inversible ? Si oui, calculer  $A^{-1}$ .

Prenons  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ . Alors

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\iff \vdots$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_3 = -2y_1 + 5y_2 + 3y_3 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} Y$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .

### Théorème 15

1. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
2. Une matrice diagonale  $D$  est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Dans ce cas, si  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , alors  $D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

### Remarque :

Une matrice contenant une ligne nulle ou une colonne nulle ne sera pas inversible.

### 10.2.3 Méthode du Pivot de Gauss

#### Définition 16

Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice sont de trois types :

- on peut échanger des lignes  $i$  et  $j$  :

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

- on peut multiplier une ligne par un réel non nul :

$$L_i \longleftarrow aL_i, \quad (a \neq 0)$$

- on peut rajouter à une ligne autant de fois qu'on veut une autre ligne :

$$L_i \longleftarrow L_i + bL_j, \quad (b \in \mathbb{R})$$

De même pour les colonnes :

- on peut échanger des colonnes  $i$  et  $j$  :

$$C_i \longleftrightarrow C_j$$

- on peut multiplier une colonne par un réel non nul :

$$C_i \longleftarrow aC_i, \quad (a \neq 0)$$

- on peut rajouter à une colonne autant de fois qu'on veut une autre ligne :

$$C_i \longleftarrow C_i + bC_j, \quad (b \in \mathbb{R})$$

#### Définition 17

Lorsqu'on obtient une matrice  $B$  à partir d'une matrice  $A$  à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires, on dit que **les matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes** et on note

$$A \sim B$$

#### Proposition 18

*Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices équivalentes, alors  $A$  est inversible si et seulement si  $B$  est inversible.*

#### Remarque :

Pour savoir si une matrice est inversible, on peut donc essayer de la changer à l'aide d'opérations élémentaires en une matrice plus simple pour vérifier l'inversibilité : les matrices triangulaires sont l'exemple le plus simple. On applique donc la méthode du Pivot de Gauss, non plus sur le système, mais sur la matrice elle-même et on regarde si la matrice triangularisée obtenue possède une ligne/colonne nulle

#### Remarque :

##### METHODE DE GAUSS-JORDAN.

Pour calculer explicitement l'inverse d'une matrice inversible  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ , il suffit de la transformer en la matrice identité  $I_n$  à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes uniquement ou **sur les colonnes uniquement**.

Si on répète exactement les mêmes opérations dans le même ordre en partant initialement de la matrice  $I_n$ , on obtiendra à la fin la matrice inverse  $A^{-1}$ .

ATTENTION : la méthode ne marche que si on ne mélange pas les opérations lignes/colonnes.

**Exemple :**

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle inversible ? Si oui, calculer  $A^{-1}$ .

Puisqu'on fait les mêmes opérations sur les matrices  $A$  et  $I$ , on les écrit côte à côte et on applique les opérations élémentaires simultanément pour déterminer  $A^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut conclure ici que la matrice  $A$  est inversible, puisqu'elle est équivalente à une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale.

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 & \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .