CHAPITRE 8

Dérivation et fonctions trigonométriques

8.1 Dérivabilité en un point

8.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in D$ tel que f soit définie au voisinage de x_0.
On dit que **f est dérivable en x_0** si la quantité :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque $x \to x_0$. Si c'est le cas, cette limite est appelé **nombre dérivé de f en x_0**, que l'on note $f'(x_0)$. On a donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Remarques :

R 1 – On peut également dire que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

R 2 – La quantité $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ représente le coefficient directeur de la droite joignant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$. Si cette quantité admet une limite finie, cela correspond au coefficient directeur de la tangente.

Théorème 2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in D$. Si la fonction f est dérivable en x_0, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse x_0, dont l'équation est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Démonstration :

Notons A le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. La tangente en A a nécessairement une équation du type :

$$y = ax + b$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Comme on l'a remarqué ci-dessus, le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(x_0)$. On a donc $a = f'(x_0)$. Ainsi l'équation de la tangente est :

$$y = f'(x_0)x + b$$

De plus, la droite doit passer par le point A. Donc l'équation doit être vérifiée pour $x = x_0$ et $y = f(x_0)$. Autrement dit :

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Longleftrightarrow b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

Ainsi l'équation de la droite est :

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarque :

Si la quantité $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $\pm\infty$, la fonction f ne sera pas dérivable en x_0, mais la courbe admettra une (demi-)tangente verticale en x_0.

8.1.2 Propriétés

Théorème 3

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in D$.
Si la fonction f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration :

Supposons que la fonction f soit dérivable en x_0. On a donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

autrement dit :

$$f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Ainsi

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Remarque :

La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Définition 4

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in D$.

- On dit que f est **dérivable en x_0 à droite**, si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'_d(x_0)$.
- On dit que f est **dérivable en x_0 à gauche**, si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'_g(x_0)$.

Proposition 5

$$f \text{ dérivable en } x_0 \in D \iff \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } x_0 \\ f \text{ dérivable à gauche en } x_0 \\ f'd(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$$

8.2 Opérations sur les fonctions dérivables

8.2.1 Somme, produit, quotient

Théorème 6

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors

1. *$f+g$ est dérivable en x_0 et*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
2. *fg est dérivable en x_0 et*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
3. *Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et :*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$
4. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.*

Démonstration :

Démonstration pour le produit. Pour tout $x \in D$ dans un voisinage de x_0 :

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(x) - fg(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)f(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\
&= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)
\end{aligned}$$

Démonstration pour le quotient. Puisque $g(x_0) \neq 0$ et que g est continue en x_0, on sait que sur tout un voisinage de x_0, les $g(x)$ sont non nuls. ON a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} \\
&= \frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} \\
&= \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)} \\
&\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}
\end{aligned}$$

8.2.2 Dérivée d'une composée

Théorème 7

Soit $f : I \to J$ dérivable en un point $a \in I$.
Soit $g; J \to \mathbb{R}$ dérivable en $b = f(a) \in J$.
Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

8.2.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 8

Soit $f : I \to J = f(I)$ une fonction continue et strictement croissante sur I.
On sait alors que f est une bijection de I sur J.
Soit $x_0 \in I$ tel que f soit dérivable en x_0.
Alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } y_0 = f(x_0) \iff f'(x_0) \neq 0$$

Dans ce cas, on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

8.2.4 Dérivabilité et équivalent

Théorème 9

Soit f une fonction dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)}$$

8.3 Fonctions circulaires

8.3.1 Fonction Sinus

Définition 10

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **fonction sinus**, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$$

Elle vérifie :
- $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x)$ (elle est impaire)
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ (elle est 2π-périodique)

Proposition 11

La fonction sin *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$$

Démonstration :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix}$$

Ainsi,

$$\sin'(x) = \frac{1}{2i} \times ie^{ix} - \frac{1}{2i} \times (-i)e^{-ix} = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)$$

Théorème 12

Puisque la fonction sin *est dérivable en* 0 *et que sa dérivée vaut* $\cos(0) = 1$, *on en déduit que*

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$$

8.3.2 Fonction Cosinus

Définition 13

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **fonction cosinus**, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$$

Elle vérifie :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = -\cos(x)$ (elle est paire)
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ (elle est 2π-périodique)
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

Proposition 14

La fonction cos *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)$$

Démonstration :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \dfrac{1}{2}e^{ix} + \dfrac{1}{2}e^{-ix}$. Ainsi,

$$\cos'(x) = \frac{1}{2} \times ie^{ix} + \frac{1}{2} \times (-i)e^{-ix} = i\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right) = -\frac{1}{i}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right) = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin(x)$$

Théorème 15

Puisque la fonction cos *est dérivable en* 0 *et que sa dérivée vaut* $\sin(0) = 0$, *on en déduit que*

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0}. \qquad \textit{De plus, on a } \boxed{\cos(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$$

Démonstration :

$\cos(x) - 1 = \mathrm{Re}(e^{ix} - 1)$. Or, $e^{ix} - 1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}\right) = e^{\frac{ix}{2}} 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.
Ainsi

$$\cos(x) - 1 = -2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \underset{x \to 0}{\sim} -2\frac{x}{2}\frac{x}{2} = -\frac{x^2}{2}$$

8.3.3 Fonction Tangente

Définition 16

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **fonction tangente**, notée tan, est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Elle vérifie :

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\},\ \tan(-x) = -\tan(x)$ (elle est paire)
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\},\ \tan(x+\pi) = \tan(x)$ (elle est π-périodique)

Proposition 17

La fonction tan *est continue et dérivable sur son domaine de définition et*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\},\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Démonstration :

La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ainsi, la fonction tangente est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ et

$$\tan'(x_0) = \frac{\sin'(x_0)\cos(x_0) - \cos'(x_0)\sin(x_0)}{(\cos(x_0))^2} = \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{(\cos(x_0))^2} = \frac{1}{\cos^2(x_0)} = 1 + \tan^2(x_0)$$

Théorème 18

Puisque la fonction tan *est dérivable en* 0 *et que sa dérivée vaut* $1 + \tan^2(0) = 1$, *on en déduit que*

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$$

8.4 Fonctions circulaires réciproques

8.4.1 Fonction Arcsin

Définition 19

La fonction sin est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est donc bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2) = [-1, 1]$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arcsinus**, notée Arcsin.

$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Remarques :

R 1 – Puisque sin et Arcsin sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

R 2 – Puisque sin est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, la fonction Arcsin est également strictement croissante sur $[-1, 1]$

R 3 – Puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.

Proposition 20

La fonction Arcsin est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable uniquement sur $]-1, 1[$. De plus

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \qquad Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Démonstration :

Puisque la fonction sin est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et que $\sin' = \cos$. On sait que :

$$\text{Arcsin dérivable en } \sin(a) \iff \sin'(a) \neq 0 \iff \cos(a) \neq 0 \iff a \notin \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ainsi Arcsin est dérivable sur tout $[-1, 1]$ sauf en $\sin(-\pi/2) = -1$ et en $\sin(\pi/2) = 1$, autrement dit, Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. De plus,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = (\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1}(x))} = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Proposition 21

Puisque la fonction Arcsin est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut $\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{Arcsin(x)}{x} = 1} \qquad et \qquad \boxed{Arcsin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x}$$

8.4.2 Fonction Arccos

Définition 22

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Elle est donc bijective de $[0,\pi]$ vers $[\cos(\pi),\cos(0)] = [-1,1]$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arccosinus**, notée Arccos.

$$\text{Arccos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

Remarques :

R 1 – Puisque cos et Arccos sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\text{Arccos}(x)) = x$$

$$\forall x \in [0,\pi]\,, \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = x$$

R 2 – Puisque cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, la fonction Arccos est également strictement décroissante sur $[-1,1]$

R 3 – Puisque $\cos^2+\sin^2 = 1$, on a pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\text{Arccos}(x))} = \sqrt{1-x^2}$.

Proposition 23

La fonction Arccos est continue sur $[-1,1]$ et dérivable uniquement sur $]-1,1[$. De plus

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Démonstration :

Puisque la fonction cos est dérivable sur $[0,\pi]$ et que $\cos' = -\sin$. On sait que :

$$\text{Arccos dérivable en} \quad \cos(a) \iff \cos'(a) \neq 0 \iff -\sin(a) \neq 0 \iff a \notin \{0,\pi\}$$

Ainsi Arccos est dérivable sur tout $[-1,1]$ sauf en $\cos(0) = 1$ et en $\cos(\pi) = 1$, autrement dit, Arccos est dérivable sur $]-1,1[$. De plus,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \text{Arccos}'(x) = (\cos^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos'(\cos^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(x))} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

8.4.3 Fonction Arctan

Définition 24

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle est donc bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\left]\lim_{x\to-\pi/2} \tan(x), \lim_{x\to\pi/2} \tan(x)\right[=]-\infty, +\infty[$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arctangente**, notée Arctan.

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Remarques :

R 1 – Puisque tan et Arctan sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan}(x)) = x, \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

R 2 – Puisque tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction Arctan est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Proposition 25

La fonction Arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$.

Démonstration :

Puisque la fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\tan' = 1 + \tan^2$. On sait que :

$$\text{Arctan dérivable en } \tan(a) \iff \tan'(a) \neq 0 \iff 1 + \tan^2(a) \neq 0 \text{ : tjs vrai !}$$

Ainsi Arctan est dérivable en tout réel de $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{\tan'(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Proposition 26

La fonction Arctan admet pour limites : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}}$. *Sa courbe représentative admet donc deux asymptotes horizontales d'équations $y = -\frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{2}$.*