

Applications et fonctions usuelles

5.1 Applications

5.1.1 Définitions

Définition 1

Soient E et F deux ensembles.

On dit que f est une **application de E dans F** si et seulement si, à tout élément x de E est associé un et un unique élément de F noté $f(x)$, et appelé **image de x par f** . L'application f se note :

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

- E est appelé l'**ensemble de départ** de l'application f ,
- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de l'application f .
- On dit qu'un élément $y \in F$ admet **un antécédent** (au moins) s'il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

On note F^E l'ensemble des applications de E dans F .

Exemples :

E1 – Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$. C'est une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans \mathbb{R} .

E2 – Les ensembles E et F ne sont pas forcément des sous-ensembles de \mathbb{R} . Par exemple, on peut créer une application :

$$g : \begin{array}{l} \{\text{élèves de 813}\} \longrightarrow \{\text{Villes de France}\} \\ Y \longmapsto \text{Ville de résidence de } Y \end{array}$$

Remarques :

R1 – Dans une application, TOUS les éléments de E admettent une image dans F . Cependant, les éléments de F n'ont pas forcément tous un antécédent dans E par l'application : l'ensemble F peut être "gros" a priori.

- R2** – Deux applications f et g sont égales si et seulement si :
- elles ont le même ensemble de départ E ,
 - elles ont le même ensemble d'arrivée F ,
 - $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

5.1.2 Restriction et prolongement d'applications

Définition 2

Soient E et F deux ensembles et soit A une partie de E .

Soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . On appelle **restriction de f à la partie A** l'application :

$$f|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f|_A(x) \end{array}$$

telle que $\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$.

On a donc restreint l'ensemble de départ (au sens de l'inclusion).

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \ln(|x|) \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

Alors si on note g la restriction de f à \mathbb{R}^{-*} . On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, g(x) = \ln(-x)$$

Définition 3

Soient E et F deux ensembles et soit E' un ensemble contenant E .

Soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . On appelle **prolongement de f à l'ensemble E'** toute application g :

$$g : \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

telle que $\forall x \in E, g(x) = f(x)$, autrement dit telle que $g|_E = f$.

On a donc augmenté l'ensemble de départ (au sens de l'inclusion).

Exemples :

- E1** – La fonction \ln n'est définie que sur \mathbb{R}^{+*} . On peut par exemple la prolonger sur tout \mathbb{R}^+ en posant :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

- E2** – La fonction g définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est également un prolongement de \ln à \mathbb{R}^+ .

5.1.3 Images directes et images réciproques

Définition 4

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .

- Soit A une partie de E . On appelle **image directe de A par l'application f** l'ensemble noté $f(A)$ défini par :

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\} = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\}$$

c'est donc l'ensemble de toutes les images des éléments de A .

- Soit B une partie de F . On appelle **image réciproque de B par l'application f** l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

c'est donc l'ensemble de tous les antécédents possibles pour les éléments de B par l'application f .

Exemples :

E1 – Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x+1}$. L'ensemble de départ de f est \mathbb{R}^+ .

L'ensemble d'arrivée de f est \mathbb{R} .

Soit $A = [0, 3]$. Quelle est l'image de la partie A par f ?

$$\forall x \in [0, 3], 0 \leq x \leq 3 \iff 1 \leq x+1 \leq 4 \iff 1 \leq \sqrt{x+1} \leq 2$$

Ainsi, l'ensemble des images des éléments de $[0, 3]$ est l'ensemble $[1, 2]$. On a donc

$$f([0, 3]) = [1, 2]$$

Soit $B = [2, 5]$ qui est bien une partie de \mathbb{R} . Quelle est l'image réciproque de la partie B par f ?

$$2 \leq \sqrt{x+1} \leq 5 \iff 4 \leq x+1 \leq 25 \iff 3 \leq x \leq 24$$

Donc l'ensemble des x qui ont pour image un élément de $[2, 5]$ est exactement l'ensemble $[3, 24]$.

Donc

$$f^{-1}([2, 5]) = [3, 24]$$

Remarque :

Attention, on peut écrire $f(x)$: c'est l'image de l'élément x . Mais on n'écrit jamais $f^{-1}(x)$: cela ne représenterait pas l'image réciproque de l'élément x . Il faut écrire $f^{-1}(\{x\})$ pour avoir l'ensemble des antécédents possibles pour x .

5.1.4 Composition d'applications

Définition 5

Soient E, F, G trois ensembles.

Soit f une application de E dans F , et soit g une application de F dans G .

On appelle **application composée de f avec g** l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Remarques :

R1 – Pour que $g \circ f$ soit bien définie, l'ensemble d'arrivée de la fonction f doit être inclus dans l'ensemble de départ de la fonction g .

R2 – Si les applications existent, on n'a pas forcément $g \circ f = f \circ g$. On dit que la loi \circ n'est pas commutative.

Exemple :

Soient les fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 3 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Peut-on définir $f \circ g$?

L'ensemble d'arrivée de g est \mathbb{R} donc on peut bien compenser par f ensuite.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = 2 \ln(x) - 3$$

Peut-on définir $g \circ f$?

La fonction f va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , donc a priori, certaines images ne seront pas dans \mathbb{R}^{+*} . On ne peut pas écrire $g \circ f$ sur tout \mathbb{R} , peut-être pour certaines valeurs.

$$2x - 3 \in \mathbb{R}^{+*} \iff 2x - 3 > 0 \iff 2x > 3 \iff x > \frac{3}{2}$$

Pour tout $x > \frac{3}{2}$, on peut définir $g \circ f(x)$, et alors :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty[, g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = \ln(2x - 3)$$

5.1.5 Applications inversibles

Définition 6

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une application **inversible** si elle admet une fonction inverse, autrement dit s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que :

- (i) $\forall x \in E, g \circ f(x) = x$
- (ii) $\forall y \in F, f \circ g(y) = y$

On dit alors que g est l'**application réciproque** de f . On note souvent $g = f^{-1}$.

Exemples :

E1 – La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ admet pour fonction réciproque la fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \exp(x) \qquad x \mapsto \ln(x)$$

En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln(x)} = x$$

E2 – La fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ admet pour fonction réciproque la fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.

$$x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x^2} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, (\sqrt{x})^2 = x$$

Remarque :

Lorsque deux fonctions réelles sont réciproques l'une de l'autre, alors leurs graphiques sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$

5.2 Cas des fonctions réelles

On considère ici des fonctions f définies sur un ensemble D , $D \subset \mathbb{R}$, et dont l'ensemble d'arrivée est \mathbb{R}

5.2.1 Parité

Définition 7

Soit f une fonction de D dans \mathbb{R} . On dit que :

- f est **paire** si :

- (i) $\forall x \in D, -x \in D$
- (ii) $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$

La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- f est **impaire** si :

- (i) $\forall x \in D, -x \in D$
- (ii) $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$

La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

5.2.2 Périodicité

Définition 8

Soit f une fonction de D dans \mathbb{R} et soit T un réel. On dit que f est **T -périodique** si :

- $\forall x \in \mathbb{R},$ on a $x \in D \iff x + T \in D$
- $\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$

5.2.3 Fonctions monotones

Définition 9

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que :

- f est **croissante sur I** si :

$$\forall a, b \in I, \quad a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$$

- f est **strictement croissante sur I** si :

$$\forall a, b \in I, \quad a < b \implies f(a) < f(b)$$

- f est **décroissante sur I** si :

$$\forall a, b \in I, \quad a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$$

- f est **strictement décroissante sur I** si :

$$\forall a, b \in I, \quad a < b \implies f(a) > f(b)$$

5.2.4 Fonctions majorées et minorées

Définition 10

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que :

- f est **majorée sur D** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leq M$$

- f est **minorée sur D** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in D, \quad f(x) \geq m$$

- f est bornée sur D si f est majorée et minorée sur D .

Remarque :

En particulier, lorsqu'une fonction est minorée par 0, on dit qu'elle est positive.
Lorsqu'une fonction est majorée par 0, on dit qu'elle est négative.

Définition 11

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que M est un **maximum** de la fonction f sur I si

(i) M est un majorant de la fonction f

(ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = M$

- On dit que M est un **minimum** de la fonction f sur I si

(i) M est un minorant de la fonction f

(ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = m$

Définition 12

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est une fonction majorée sur I , alors l'ensemble des majorants de f admet un plus petit élément, appelé la **borne supérieure de f** . On le note :

$$\sup_{x \in I} f(x)$$

- Si f est une fonction minorée sur I , alors l'ensemble des minorants de f admet un plus grand élément, appelé la **borne inférieure de f** . on le note :

$$\inf_{x \in I} f(x)$$

Remarque :

Si la borne supérieure est atteinte par la fonction f , alors la borne supérieure devient un maximum. De même pour la borne inférieure.

Exemple :

Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

définie sur \mathbb{R}^{+*} est toujours positive, elle est donc minorée par 0. De même, tout réel négatif est un minorant de f .

0 est le minorant le plus grand, mais la fonction n'admet aucun de minimum ici car on a jamais $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$$

5.3 Fonctions usuelles

5.3.1 Fonction valeur absolue

Définition 13

La fonction valeur absolue est la fonction :

$$\text{abs} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array} .$$

L'image d'un réel x par la fonction partie entière est noté $|x|$ ou $\text{abs}(x)$.

Proposition 14

1. La fonction valeur absolue est définie, paire et positive sur \mathbb{R} .
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| = 0 \iff x = 0$
3. Pour tout $a > 0$, alors $|x| = a \iff x = a \text{ ou } x = -a$

Remarques :

R1 – On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x| \cdot |y|$ et si $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

R2 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = |x^2| = x^2$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$

R3 – On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq y^2 \iff |x| \geq |y|$.
Si x et y sont positifs, alors $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

R4 – Si $a > 0$, alors $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

R5 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-|x| \leq x \leq |x|$

R6 – L'inégalité triangulaire reste encore vraie : $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Proposition 15

1. La fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} .
2. Les limites de la fonction valeur absolue sont : $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$
3. La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{abs}'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
4. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Elle n'est donc pas dérivable sur tout \mathbb{R} .
5. La fonction valeur absolue est décroissante sur \mathbb{R}^- , puis croissante sur \mathbb{R}^+ .

5.3.2 Fonction partie entière

Définition 16

La **partie entière d'un réel** x est le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x . On la note $\text{Ent}(x)$. On a donc par définition, pour tout réel x :

$$\text{Ent}(x) \leq x < \text{Ent}(x) + 1$$

et

$$x - 1 < \text{Ent}(x) \leq x$$

Proposition 17

1. La fonction partie entière est définie sur \mathbb{R} .
2. La fonction partie entière est continue et dérivable sur chaque intervalle $]k, k + 1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\forall x \in]k, k + 1[, \quad \text{Ent}'(x) = 0$$

3. La fonction partie entière est discontinue (donc aussi non dérivable) en tout nombre entier.
4. La fonction partie entière est croissante sur \mathbb{R} .

Remarques :

R1 – Attention, la partie entière ne correspond pas forcément au "chiffre se trouvant avant la virgule", cela ne marche que pour les nombres positifs. On a par exemple :

$$\text{Ent}(2.56) = 2, \quad \text{Ent}(-4.86541) = -5$$

R2 – La fonction partie entière admet pour limites en l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Ent}(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Ent}(x) = +\infty$$

R3 – Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \text{Ent}(x) = k - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} \text{Ent}(x) = k$$

5.3.3 Fonction racine carrée

Définition 18

Soit $a \geq 0$. La racine carrée de a , notée \sqrt{a} est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$. La fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$.

Remarques :

R1 – Pour $a \geq 0$, on a $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

R2 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$

R3 – Pour a et b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et si $b > 0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

R4 – Si $xy \geq 0$, alors $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$

Proposition 19

1. La fonction racine carrée est définie et continue sur \mathbb{R}^+ .

2. On a :

$$\boxed{\sqrt{0} = 0}, \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty}, \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0}, \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty}$$

3. La fonction racine carrée $r : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\boxed{\forall x > 0, r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

4. La fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}^+ .

5. Si u est une fonction définie et dérivable sur I et à valeurs dans \mathbb{R}^+ , alors

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

5.3.4 Fonction inverse

Définition 20

La fonction inverse est définie sur \mathbb{R}^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$$

Remarques :

R1 – La fonction inverse est impaire sur \mathbb{R}^*

R2 – On dit que la courbe de la fonction inverse est une **hyperbole**.

Proposition 21

1. La fonction inverse est définie et continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

2. La fonction inverse est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

3. La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$.

4. Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R}^* , alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Remarque :

Si u et v sont dérivables sur un intervalle I , avec v à valeurs dans \mathbb{R}^* , alors la fonction $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5.3.5 Fonction logarithme népérien

Définition 22

La fonction \ln est l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction continue définie sur \mathbb{R}^{+*} par $x \mapsto \frac{1}{x}$.
La fonction \ln

Remarques :

R1 – Par définition, la fonction \ln est définie sur \mathbb{R}^{+*} et $\ln(1) = 0$.

R2 – La fonction \ln est continue et dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et $\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

R3 – La fonction logarithme est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*}

Remarques :

R1 – Pour a et b strictement positifs, on a : $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$ et :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

R2 – Si $xy > 0$, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln(|y|)$ et $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$.

R3 – Pour $a > 0$ et x réel $\ln(a^x) = x \ln(a)$. En particulier, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Proposition 23

Les limites usuelles à connaître pour la fonction \ln sont :

1. Les limites aux bornes du domaine de définition : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

2. Les limites dites de "croissances comparées" : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = 0$.

Plus généralement pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha (\ln(x))^\beta = 0$.

3. Le taux d'accroissement en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

5.3.6 Fonction exponentielle

Définition 24

La fonction $\ln : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inversible : elle admet une fonction réciproque, qu'on appelle la **fonction exponentielle** : $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$. On la note $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp(x)$.

Remarques :

R1 – La fonction exponentielle est définie sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

R2 – Elle est continue et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$

R3 – La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

R4 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $y = e^x \iff x = \ln(y)$.

R5 – Pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

R6 – On a $\ln(e) = 1$, $e^1 = e \simeq 2.718$ et $e^0 = 1$.

Remarques :

R1 – Pour tous réels a et b , $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.

R2 – Pour tous réels a et b , on a $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ et $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

R3 – Pour tous réels a et b , on a $e^{ab} = (e^a)^b = (e^b)^a$

R4 – Pour tout $a > 0$, on a $a^x = e^{x \ln(a)}$.

Proposition 25

Les limites usuelles à connaître pour la fonction \exp sont :

1. Les limites aux bornes du domaine de définition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

2. Les limites dites de "croissances comparées" : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

Plus généralement pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.

3. Le taux d'accroissement en 0 de \exp : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

5.3.7 Fonctions puissance

Définition 26

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance f :

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

est définie pour tout $x > 0$.

Remarques :

- R1** – Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors la fonction $f(x) = x^n$ est définie sur \mathbb{R} .
- R2** – Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, alors la fonction $f(x) = x^n$ est définie sur \mathbb{R}^* .
- R3** – Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n \times x$ et par convention, $x^0 = 1$
- R4** – Pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul, on a : $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$

Proposition 27

La fonction f définie par $f(x) = x^\alpha$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Remarques :

- R1** – Pour tous x et y strictement positifs, on a :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, \quad x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

- R2** – Si on peut écrire $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, alors pour tout $x > 0$,

$$x^\alpha = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Proposition 28

Soit la fonction f définie par $f(x) = u(x)^{v(x)}$, définie sur l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $u(x) > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (tel que $u(x) > 0$), on a

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}$$

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I avec $u(x) > 0$ sur I , alors

$$(u^v)' = (e^{v \ln(u)})' = (v \ln(u))' u^v$$