CHAPITRE 13

Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

13.1 Définitions

13.1.1 Espaces vectoriels

Définition 1

Soit E un ensemble muni de deux opérations :
- une addition notée $+$
- une multiplication par un scalaire, notée $\cdot$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** si :

- $(E, +)$ est un **groupe commutatif**, i.e. :
  - ▷ la loi $+$ est **interne** : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E$
  - ▷ la loi $+$ est **associative** : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E, \quad (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \in E$
  - ▷ la loi $+$ **admet un élément neutre**, appelé le vecteur nul $\overrightarrow{0_E}$:
    $\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
  - ▷ Chaque vecteur **admet un opposé** pour la loi $+$:
    $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \exists \overrightarrow{v} \in E \ / \ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$
    (on note $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}$)
  - ▷ La loi $+$ est **commutative** : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E, \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- L'opération $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :
  - ▷ $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{u} \in E, \qquad \lambda \cdot \overrightarrow{u} \in E$
  - ▷ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \overrightarrow{u} \in E, \qquad \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{u}) = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{u}$
  - ▷ $\forall \overrightarrow{u} \in E, \qquad 1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
  - ▷ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{u} \in E, \qquad (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{u}$
  - ▷ $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{u}, v \in E, \qquad \lambda \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$

Remarques :

- **R 1** – On écrit souvent $\lambda\overrightarrow{u}$ à la place de $\lambda \cdot \overrightarrow{u}$.
- **R 2** – Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les éléments de E sont appelés des **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Exemples :

- **E 1** – $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- **E 2** – $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- **E 3** – $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ l'ensemble des n-uplets de réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- **E 4** – $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
- **E 5** – $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
- **E 6** – $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
- **E 7** – $\mathbb{K}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
- **E 8** – $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n
- **E 9** – L'ensemble des suites réelles
- **E 10** – L'ensemble des fonctions réelles
- **E 11** – L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I
- **E 12** – L'ensemble des fonctions dérivables sur un intervalle I

13.1.2 Combinaisons linéaires

Définition 2

Une **famille** de n vecteurs d'un espace vectoriel E est un n-uplet $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ où les $\overrightarrow{v_i}$ sont des vecteurs de E.

Exemples :

- **E 1** – $(1, 2, 3)$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}$
- **E 2** – $((1, 2), (2, 3), (3, 4i))$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{C}^2$
- **E 3** – $(X^2 + 1, X, X^3)$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}[X]$
- **E 4** – $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de 1 vecteur de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Définition 3

Soit $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E.
On appelle **combinaison linéaire de** $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ tout vecteur de la forme

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i\overrightarrow{v_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i est un scalaire (élément de $\mathbb{K}$). Les λ_i sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemples :

E 1 – $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}$, $2\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}+3\overrightarrow{v_3}$, $4\overrightarrow{v_1}-3\overrightarrow{v_3}$ sont à chaque fois des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$.

E 2 – Soient $M=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -7 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.
On cherche à savoir si M est une combinaison linéaire de A et B. En d'autres termes, on cherche à savoir si on peut trouver deux scalaires a et b tels que $M=aA+bB$.
Or, on a :

$$\begin{aligned}
M=aA+bB &\iff \begin{pmatrix}3 & 4\\ -7 & 3\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}3 & 4\\ -7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b & 3a+2b\\ -a+5b & 2a+b\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} a \quad -b &=3\\ 3a \quad +2b &=4\\ -a \quad +5b &=-7\\ 2a \quad +b &=3\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a-b &=3\\ -b &=1\\ 4b &=-4\\ 3b &=-3\end{cases} \iff \begin{cases} a=2\\ b=-1\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc on a $M=2A-B$ et donc M est une combinaison linéaire de A et B.
Remarquons que ici, le choix de a et b est unique (mais ce n'est pas forcément le cas).

E 3 – Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\overrightarrow{x}=(3,-1,-3)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}=(1,-1,2)$, $\overrightarrow{v}=(5,-3,1)$ et $\overrightarrow{w}=(-2,2,-4)$?

On cherche ici trois scalaires a, b, c tels que $\overrightarrow{x}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}$.
Or, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w} &\iff (3,-1,-3)=a(1,-1,2)+b(5,-3,1)+c(-2,2,-4)\\
&\iff (3,-1,-3)=(a+5b-2c,-a-3b+2c,2a+b-4c)\\
&\iff \begin{cases} a+5b-2c &=3\\ -a-3b+2c &=-1\\ 2a+b-4c &=-3\end{cases} \iff \begin{cases} a+5b-2c=3\\ 2b=2\\ -9b=-9\end{cases} \iff \begin{cases} a=2c-2\\ b=1\end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc, par exemple, $\overrightarrow{x}=4\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+3\overrightarrow{w}$ et donc $\overrightarrow{x}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Remarquons qu'ici le choix des scalaires a, b, c n'est pas unique.

Définition 4

L'**ensemble de toutes les combinaisons linéaires** d'une famille de vecteurs $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n})$ est notée :

$$Vect(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n})=\{\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{v_n},\quad \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}\}$$

13.1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un sous-ensemble de E.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel de E** si :

- $F \subset E$
- $F \neq \emptyset$ (par exemple, $\overrightarrow{0_E} \in F$)
- F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$$

Exemple :

Montrons que $\mathbb{R}_3[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- $\mathbb{R}_3[X] \subset \mathbb{R}[X]$
- $\mathbb{R}_3[X]$ n'est pas vide, car par exemple le polynôme nul appartient à $\mathbb{R}_3[X]$
- Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On sait que $\lambda P + Q$ est encore un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. De plus,

$$\deg(\lambda P + Q) \leqslant \max(\deg(\lambda P, Q)) \leqslant 3$$

Ainsi, $\mathbb{R}_3[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 6

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $(F, +, \cdot)$ est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque :

Lorsqu'on a une question "Montrer que l'ensemble F est un espace vectoriel", dans 99% des cas, on ne revient pas à la définition 1. On essaie plutôt de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, et donc on en conclut que c'est encore un espace vectoriel

Exemples :

E 1 – Soit $\mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé, et on note E_α l'ensemble des polynômes qui admettent α pour racine :

$$E_\alpha = \{P \in \mathbb{C}[X] \ / \ P(\alpha) = 0\}$$

Montrons que E_α est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Commençons par remarquer que E_α est un sous-ensemble de $\mathbb{C}[X]$. Montrons donc que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

- $E_\alpha \neq \emptyset$ (le polynôme nul est dans E_α)
- Considérons P et Q appartenant à l'ensemble E_α et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
  Montrons que $\lambda P + Q$ appartient encore à E_α.

  On sait par hypothèse que $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$. Donc

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0 + 0 = 0$$

  Donc on a bien $\lambda P + Q \in E_\alpha$.

Ainsi, E_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ et donc en particulier c'est bien un espace vectoriel.

E 2 – Soit E l'ensemble des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(1) = f'(1) = 0$.

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \quad / \ f(1) = f'(1) = 0\}$$

Montrons que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

- $E \neq \emptyset$ (la fonction nulle appartient à E)
- Considérons f et g appartenant à l'ensemble E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Montrons que $\lambda f + g$ appartient encore à E.

  On sait que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $f(1) = f'(1) = g(1) = g'(1) = 0$.
  On sait donc que par somme, $\lambda f + g$ est encore une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

  $$(\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0, \qquad (\lambda f + g)'(1) = \lambda f'(1) + g'(1) = 0$$

  Donc on a bien $\lambda f + g \in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier c'est bien un espace vectoriel.

Proposition 7

Soit $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.
Alors l'ensemble $Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est un sous-espace vectoriel de E.
On l'appelle le ***sous-espace vectoriel engendré par la famille*** $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$

Remarque :

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut donc parfois essayer de l'écrire directement sous la forme $Vect(\dots)$. Alors, on aura directement la réponse.

Exemples :

E 1 – Considérons l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
E est-il un espace vectoriel ?

On va essayer d'écrire E comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de matrices fixées. Il faut donc faire apparaître les "lettres" comme des coefficients de la combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 2y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc E est un espace vectoriel.

E 2 – Soit $E = \{(a+2b-c+d, 2a+3b-d, b-c+2d),\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$.
Montrons que E est un espace vectoriel.

$$\begin{aligned} E &= \{(a+2b-c+d, 2a+3b-d, b-c+2d),\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a,2a,0)+(2b,3b,b)+(-c,0,-c)+(d,-d,2d),\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1,2,0)+b(2,3,1)+c(-1,0,-1)+d(1,-1,2),\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\left((1,2,0),(2,3,1),(-1,0,-1),(1,-1,2)\right) \end{aligned}$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donc c'est un espace vectoriel.

Proposition 8 ***Intersection de sous-espaces vectoriels***

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.

13.2 Bases et dimension d'un espace vectoriel

13.2.1 Familles génératrices

Définition 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit qu'une famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E est **génératrice de E** si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}$:

$$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \quad / \quad \overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p}$$

Ainsi,

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}) \text{ génératrice de } E \iff E = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$$

Proposition 10

Si $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est une famille génératrice de E, alors :

1. *si on change l'ordre des vecteurs de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$, alors la famille reste une famille génératrice de E*
2. *si on rajoute un vecteur $\overrightarrow{u}$ à la famille : $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{u})$ est encore une famille génératrice de E.*

Exemples :

E 1 – La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$, puisque tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire

$$P = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n \text{ avec } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

autrement dit comme une combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots, X^n$.

E 2 – Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x+y-z = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une famille génératrice.

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x+y-z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = z-2x\} \\ &= \{(x, z-2x, z), \ x,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,-2,0) + z(0,1,1), \ x,z \in \mathbb{R}\} \qquad = Vect((1,-2,0),(0,1,1)) \end{aligned}$$

Puisque E apparaît directement comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est un espace vectoriel et une famille génératrice est $((1,-2,0),(0,1,1))$.

Proposition 11

Soit E un espace vectoriel et soit $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille génératrice de E.
Si $\overrightarrow{v_n}$ est une combinaison linéaire de $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}})$, alors le vecteur $\overrightarrow{v_n}$ n'est pas utile dans la famille génératrice, et la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}})$ est aussi génératrice de E :

$$E = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}}, \overrightarrow{v_n}) = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}})$$

Démonstration :

On souhaite ici montrer que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}})$ est génératrice de E, donc autrement dit que tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}}$.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de E.
Par hypothèse, on sait que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est une famille génératrice de E. Donc

$$\exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ \overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{v_i}$$

On sait aussi que l'on peut écrire $\overrightarrow{v_n} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$ (avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$), on a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{v_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \overrightarrow{v_i} + a_n \overrightarrow{v_n} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \overrightarrow{v_i} + a_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \overrightarrow{v_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + a_n \lambda_i) \overrightarrow{v_i} \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}})$.
On a donc bien montré que cette famille est génératrice de E.

13.2.2 Familles libres

Définition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E est appelée une **famille libre** si la seule combinaison linéaire nulle qu'on peut former avec ces vecteurs est celle avec tous les coefficients égaux à 0.
Autrement dit, la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est libre si pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$:

$$\text{si } \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0_E}, \qquad \text{alors } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Une famille qui n'est pas libre est appelée une **famille liée**.

Remarques :

- **R 1** – Lorsqu'une famille est libre, on dit aussi que ses vecteurs sont **linéairement indépendants**.
- **R 2** – Par définition, la famille $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ est liée s'il existe des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0_E}$
- **R 3** – Si un des vecteurs de la famille est le vecteur nul, alors la famille est nécessairement liée

Exemples :

E 1 – La famille $((1,3,-3),(4,2,-3),(-1,7,6))$ est-elle une famille libre ou liée de $\mathbb{R}^3$?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(1,3,-3) + \lambda_2(4,2,-3) + \lambda_3(-1,7,6) = (0,0,0)$.
Alors, on a :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(1,3,-3) + \lambda_2(4,2,-3) + \lambda_3(-1,7,6) = (0,0,0)\\
\Longrightarrow &(\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3, -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + 6\lambda_3) = (0,0,0)\\
\Longrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 &= 0\\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0\\ -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \end{cases}\\
\Longrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 &= 0\\ -10\lambda_2 + 10\lambda_3 &= 0\\ -9\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{cases}\\
\Longrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 &= 0\\ \lambda_2 &= \lambda_3\\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}\\
\Longrightarrow &\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

La famille $((1,3,-3),(4,2,-3),(-1,7,6))$ est donc libre.

E 2 – La famille de polynômes $(1 + X + X^2, 3 + X + 5X^2, 2 + X + 3X^2)$ est-elle une famille libre ou liée de $\mathbb{R}[X]$?

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a(1+X+X^2)+b(3+X+5X^2)+c(2+X+3X^2)=0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors :

$$\begin{aligned}
& a(1+X+X^2)+b(3+X+5X^2)+c(2+X+3X^2)=0_{\mathbb{R}[X]} \\
\Longrightarrow & (a+3b+2c)+(a+b+c)X+(a+5b+3c)X^2=0 \\
\Longrightarrow & \left\{\begin{array}{rl} a+3b+2c & =0 \\ a+b+c & =0 \\ a+5b+3c & =0 \end{array}\right. \\
\Longrightarrow & \left\{\begin{array}{rl} a+3b+2c & =0 \\ 4b+2c & =0 \\ 2b+c & =0 \end{array}\right. \\
\Longrightarrow & \left\{\begin{array}{ll} a & =b \\ c & =-2b \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On voit qu'on a ici une infinité de solutions pour a, b, c, donc la famille ne peut pas être libre. Par exemple, $(a, b, c)=(1,1,-2)$ fonctionne :

$$(1+X+X^2)+(3+X+5X^2)-2(2+X+3X^2)=0$$

La famille $(1+X+X^2, 3+X+5X^2, 2+X+3X^2)$ est donc liée.

Remarque :

Parfois, un choix possible de combinaison linéaire nulle (avec des coefficients non tous nuls) est évident. on peut alors éviter les calculs et répondre directement en disant "on remarque que ..., donc la famille est liée". Dans l'exemple précédent, on aurait pu voir directement que

$$(1+X+X^2)+(3+X+5X^2)=2(2+X+3X^2)$$

et donc on peut tout de suite conclure que la famille est liée.

Proposition 13 ***Famille libre de polynômes***

Si $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés distincts deux à deux, (on dit que ce sont des ***polynômes de degrés étagés****), alors la famille $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.*

Proposition 14

Soit E un espace vectoriel.
Si on change l'ordre des vecteurs d'une famille libre de E, on obtient encore une famille libre de E.
Si on change l'ordre des vecteurs d'une famille liée de E, on obtient encore une famille liée de E.

Proposition 15 ***Cas d'un seul vecteur***

Soit E un espace vectoriel et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Alors

$$(\overrightarrow{u}) \text{ est liée} \iff \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0_E}$$

et donc au contraire, si une famille est formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre :

$$(\overrightarrow{u}) \text{ est libre} \iff \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0_E}$$

Démonstration :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $(\vec{u})$ est liée, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda\vec{u} = \overrightarrow{0_E}$, et donc nécessairement $\vec{u} = \overrightarrow{0_E}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors pour tout $\lambda \neq 0$, on a bien $\lambda\vec{u} = \vec{0}$, donc la famille $(\vec{u})$ est liée.

Proposition 16 ***Cas de deux vecteurs***

Soit E un espace vectoriel et soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs. Alors

$$(\vec{u}, \vec{v}) \text{ est liée} \iff \exists\lambda \in \mathbb{K} \;/\; \left|\begin{array}{l} \vec{u} = \lambda\vec{v} \\ \text{ou} \\ \vec{v} = \lambda\vec{u} \end{array}\right.$$

On dit alors que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** *ou* ***proportionnels****.*

Réciproquement, si deux vecteurs de E sont non colinéaires, alors ils forment nécessairement une famille libre.

Démonstration :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(\vec{u}, \vec{v})$ liée, alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tel que

$$\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} = \vec{0}$$

Si $\lambda_1 \neq 0$, alors on a $\vec{u} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v}$.

Si $\lambda_1 = 0$, alors nécessairement $\lambda_2 \neq 0$ et on a $\vec{v} = \overrightarrow{0_E}$, donc $\vec{v} = 0\vec{u}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, alors $\vec{u} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$, donc comme $(1, \lambda) \neq (0, 0)$, la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée. (De même, si on a $\vec{v} = \lambda\vec{u}$).

Proposition 17

Soit E un espace vectoriel et soient $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E. Alors

$$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \text{ est liée} \iff \text{L'un des } \overrightarrow{u_i} \text{ est égal à une combinaison linéaire des autres}$$

Démonstration :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ liée. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que

$$\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0_E}$$

Au moins l'un des λ_i est non nul : nommons-le λ_k. On peut alors écrire

$$\lambda_k\overrightarrow{u_k} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \lambda_i\overrightarrow{u_i}$$

d'où

$$\overrightarrow{u_k} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_k}\overrightarrow{u_i}$$

et donc $\overrightarrow{u_k}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons qu'un des vecteurs soit combinaison linéaire des autres. Par exemple, appelons $\overrightarrow{u_k}$ ce vecteur. Alors :

$$\exists(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{n-1} \;/\; \overrightarrow{u_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \mu_i\overrightarrow{u_i}$$

et donc
$$\mu_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \mu_{k-1}\overrightarrow{u_{k-1}} - \overrightarrow{u_k} + \mu_{k+1}\overrightarrow{u_{k+1}} + \cdots + \mu_n\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0_E}$$
Comme $(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, -1, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est bien liée.

Proposition 18

Soit E un espace vectoriel et soit $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ une famille libre.
Alors toute sous-famille de vecteurs de cette famille est encore une famille libre.

Démonstration :

Soit $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ une famille libre.
Comme on peut changer l'ordre, il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, les k premiers vecteurs de la famille forment une famille libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que
$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0_E}$$
On a donc :
$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{v_k} + 0\overrightarrow{v_{k+1}} + \cdots + 0\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0_E}$$
autrement dit, une combinaison linéaire nulle des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p}$. Comme la famille est libre, on en déduit donc que tous les coefficients sont nuls, et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, et on a bien montré que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k})$ est libre.

Proposition 19

Soit E un espace vectoriel et soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille libre.
Si deux combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ sont égales, alors nécessairement les coefficients sont égaux deux à deux.
$$\text{Si } \sum_{i=1}^{p} a_i\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{p} b_i\overrightarrow{u_i}, \qquad \text{alors } \forall i \in [\![1, p]\!],\ a_i = b_i$$

Démonstration :

Supposons donc que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ soit libre.
Supposons qu'il existe $(a_1, \dots, a_p), (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que
$$\sum_{i=1}^{p} a_i\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{p} b_i\overrightarrow{u_i}$$
alors on a :
$$\sum_{i=1}^{p} (a_i - b_i)\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0_E}$$
autrement dit une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ qui est libre. On en déduit que tous les coefficients sont nuls, et donc
$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ a_i = b_i$$

13.2.3 Bases

Définition 20

Soit E un espace vectoriel et soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est **une base de E.** si elle est libre et génératrice de E.

Proposition 21

La famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de E si et seulement si pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$$

*Les coefficients λ_i sont appelés les **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$.*

Remarques :

R 1 – Attention, si on change l'ordre des vecteurs dans une base, on obtient encore une base, mais ce n'est pas la même : les coordonnées des vecteurs sont changées

R 2 – Pour trouver les coordonnées d'un vecteur donné dans une base donnée, il suffit d'écrire ce vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de la base, et de lire les coordonnées qui sont les coefficients de la combinaison linéaire.

R 3 – Pour trouver une base d'un espace vectoriel E donné :

1. on commence par trouver une famille génératrice : écrire $E = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$.
2. On vérifie si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ est libre : si elle l'est c'est gagné. Sinon, on sait qu'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres : on peut l'enlever dans la famille génératrice, et on recommence avec les $n-1$ vecteurs restants, et ainsi de suite.

Exemple :

Soient $\overrightarrow{e_1} = (1, 2, -3)$, $\overrightarrow{e_2} = (-2, 0, 5)$ et $\overrightarrow{e_3} = (-4, 4, 9)$. On pose $F = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Déterminons une base de F.

Par définition, la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est déjà génératrice de F.
Regardons si la famille est libre.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}$. On a :

$$\begin{aligned}
& a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}} \\
\Longrightarrow & a(1,2,-3) + b(-2,0,5) + c(-4,4,9) = (0,0,0) \\
\Longrightarrow & (a - 2b - 4c, 2a + 4c, -3a + 5b + 9c) = (0,0,0) \\
\Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{rl} a - 2b - 4c & = 0 \\ 2a + 4c & = 0 \\ -3a + 5b + 9c & = 0 \end{array} \right. \\
\Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{rl} -2b - 6c & = 0 \\ a & = -2c \\ 5b + 15c & = 0 \end{array} \right. \\
\Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = -2c \\ b = -3c \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc la famille n'est pas libre, en particulier, on a : $\overrightarrow{e_3} = 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}$.
Puisque la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est génératrice de F et que $\overrightarrow{e_3}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$, on sait que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est aussi une famille génératrice de F.
Or, les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont clairement non colinéaires, donc la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est libre.
Finalement, la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est libre et génératrice de F, c'est donc une base de F.

13.2.4 Bases canoniques

Proposition 22 ***Base canonique de $\mathbb{K}^n$***

On définit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \overrightarrow{e_i} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

où le 1 apparaît en i-ième position.

La famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est alors une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la ***base canonique de*** $\mathbb{K}^n$

Démonstration :

Montrons que par exemple dans $\mathbb{R}^3$, la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$.

$$\begin{aligned} & a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0} \\ \Longrightarrow & a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0) \\ \Longrightarrow & (a,b,c) = (0,0,0) \\ \Longrightarrow & a = b = c = 0 \end{aligned}$$

  Donc la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est libre.
- Montrons que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est génératrice.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \{(x,y,z),\ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1),\ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \\ &= Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \end{aligned}$$

  Donc la famille est bien génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Puisque la famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est bien une base.

Proposition 23

La famille $(1, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée la ***base canonique de*** $\mathbb{K}_n[X]$

Proposition 24

Pour tous entiers $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, on définit la matrice $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui, lui, vaut 1.
La famille $(E_{i,j})$ est alors une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ que l'on appelle la ***base canonique de*** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

13.2.5 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 25

Soit E un espace vectoriel.
On dit que E est un **espace vectoriel de dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie.

Exemples :

- **E 1** – $\mathbb{R}^n$ est un ev de dimension finie puisque la famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ précédente est une famille génératrice finie de $\mathbb{R}^n$.
- **E 2** – $\mathbb{R}_n[X]$ est un ev de dimension finie puisque la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{R}_n[X]$.
- **E 3** – $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie puisque le nombre de degrés différents possibles pour les polynômes étant infinis, il faudrait nécessairement une famille génératrice infinie pour engendrer $\mathbb{R}[X]$ tout entier.

Théorème 26

Tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie admet au moins une base.

Théorème 27

*Soit E un espace vectoriel de dimenfion finie non réduit à $\{0\}$. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension de l'espace vectoriel** E et est noté* $\dim(E)$*.*
Par convention, on dit que l'espace vectoriel $\{\overrightarrow{0_E}\}$ est de dimension 0.

Remarques :

- **R 1** – L'espace $\{\overrightarrow{0_E}\}$ est particulier car il n'admet pas de famille libre, donc pas de base.
- **R 2** – Lorsqu'un espace vectoriel ne possède pas de famille génératrice finie, on dit qu'il est de **dimension infinie**.
  C'est le cas par exemple de $\mathbb{K}[X]$, de l'espace des suites réelles, l'espace des fonctions continues, ...

Théorème 28

$$\dim(K^n) = n, \qquad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np, \qquad \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2, \qquad \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$$

Proposition 29

Soit E un espace de dimension finie n.

1. *Toute famille libre de n vecteurs est une base de E.*
2. *Toute famille génératrice de n vecteurs est une base de E.*
3. *Toute famille libre possède au plus n vecteurs.*
4. *Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.*

Remarques :

- **R 1** – Pour trouver la dimension d'un espace vectoriel, en général il faut chercher une famille et montrer qu'elle est libre et génératrice.
  MAIS : si on connaît déjà la dimension la dimension de l'espace et que l'on se donne une famille de n vecteurs, il suffit de montrer que cette famille est SOIT libre SOIT génératrice pour montrer que c'est une base.
- **R 2** – Dans un espace de dimension n, toute famille de strictement plus de n vecteurs est nécessairement liée.
- **R 3** – Dans un espace de dimension n, toute famille de strictement moins de n vecteurs n'est jamais génératrice.

Exemple :

On considère les quatre polynômes suivants :

$$P_0 = (X-1)(X-2)(X-3),\ P_2 = X(X-1)(X-2),\ P_3 = X(X-2)(X-3),\ P_3 = X(X-1)(X-2)$$

Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

On a une famille de 4 polynômes et on sait que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Il suffit donc de montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre pour conclure que c'est une base.
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
& aP_0(X) + bP_1(X) + cP_2(X) + dP_3(X) = 0 \\
\Longrightarrow & a(X-1)(X-2)(X-3) + bX(X-1)(X-2) + cX(X-2)(X-3) + dX(X-1)(X-2) = 0 \\
\Longrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ a(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-1)(x-2) + cx(x-2)(x-3) + dx(x-1)(x-2) = 0 \\
\Longrightarrow & \begin{cases} (\text{pour } x=0), & -6a = 0 \\ (\text{pour } x=1), & -2b = 0 \\ (\text{pour } x=2), & -2c = 0 \\ (\text{pour } x=3), & 6d = 0 \end{cases} \\
\Longrightarrow & a = b = c = d = 0
\end{aligned}$$

La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre.
Ainsi, puisque (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$ et que $\mathrm{Card}(P_0, P_1, P_2, P_3) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème 30 ***Théorème de la base incomplète***

Soit E un espace de dimension finie n et soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ une famille libre de E.
Alors il existe des vecteurs $\overrightarrow{e_{k+1}}, \overrightarrow{e_{k+2}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ tels que $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ soit une base de E.

13.2.6 Dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème 31

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F est un espace vectoriel de dimension finie également, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Proposition 32

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Si $F \subset G$, alors on a $\dim(F) \leqslant \dim(G)$.
De plus, si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, on a $F = G$.

Définition 33

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- Un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 est appelé une **droite vectorielle de E**
- Un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 est appelé un **plan vectoriel de E**.

13.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 34

Soit E un espace vectoriel et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit :

$$F + G = \{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \qquad \overrightarrow{x} \in F,\ \overrightarrow{y} \in G\}$$

Alors $F + G$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Remarque :

> Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sont respectivement des bases de F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors
> $$F + G = Vect(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$$

Théorème 35 ***Formule de Grassman***

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Définition 36

On dit qu'une somme $F + G$ est **directe** si

$$\forall \overrightarrow{u} \in F + G,\ \exists!(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F \times G\ /\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$$

autrement dit la décomposition d'un vecteur en somme d'éléments de F et G est unique.
La somme directe est alors notée :

$$F \oplus G$$

Proposition 37

Soit E un espace vectoriel et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les proportions sont équivalentes :

(i) La somme $F + G$ est directe.
(ii) $\forall \overrightarrow{u} \in F + G,\ \exists!(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F \times G\ /\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$
(iii) $F \cap G = \{0\}$

Définition 38

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G sont **supplémentaires dans E** si :

$$E = F \oplus G$$

ou autrement dit

$$E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}$$

Théorème 39

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire