

1 Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ admet-il dans \mathbb{R}^2 aucune solution ? une unique solution ? une infinité de solutions ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + y = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ (1 - \lambda^2)y = 1 - \lambda \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ (1 - \lambda)(1 + \lambda)y = (1 - \lambda) \end{cases} \end{aligned}$$

- **1er cas** : $\lambda = 1$. Alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 - x$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{(x, 1 - x), x \in \mathbb{R}\}$.

- **2ème cas** : $\lambda \neq 1$. Alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ (1 - \lambda)(1 + \lambda)y = (1 - \lambda) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ (1 + \lambda)y = 1 \end{cases}$$

- **Cas A** : $\lambda = -1$. Alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \emptyset$

- **Cas B** : $\lambda \neq -1$. Alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ y = \frac{1}{1 + \lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda y = 1 - \frac{\lambda}{1 + \lambda} = \frac{(1 + \lambda) - \lambda}{1 + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda} \\ y = \frac{1}{1 + \lambda} \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{1 + \lambda}, \frac{1}{1 + \lambda} \right) \right\}$.

En conclusion :

- Si $\lambda = 1$, il y a une infinité de solutions.
- Si $\lambda = -1$, il n'y a pas de solution.
- Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, il y a une unique solution.

2 Résoudre dans \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^4 les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 14 \\ x - 2z = 14 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z + t = 11 \\ 2x + y + z + t = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x - 4y + 2z + t = 1 \\ y + z - t = 0 \\ -3x + 6y - 3t = -1 \end{cases}$$

1.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \end{cases} && L_1 \leftarrow L_3 \leftarrow L_2 \leftarrow L_1 \\ &\iff \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 0 + 3y - z = 3 \\ 15y - 9z = -3 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 0 + 3y - z = 3 \\ -4z = -18 \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ &\iff \begin{cases} x = -1 \\ 0 + y = \frac{5}{2} \\ z = \frac{9}{2} \end{cases} \\ \mathcal{S} &= \left\{ \left(-1, \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ -4y + 15z = -2 \\ -4y + 5z = -2 \\ 4y + 3z = 2 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ -4y + 15z = -2 \\ -10z = 0 \\ 18z = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} t = \frac{-1}{2} - x \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \\ \mathcal{S} &= \left\{ \left(x, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} - x \right), x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+y+z+t = 11 \\ 2x+y+z+t = 2 \\ x+2y+2z = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+y+z+t = 11 \\ x = -9 \\ y+z-t = -10 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\iff \begin{cases} y+z+t = 20 \\ x = -9 \\ y+z-t = -10 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2t = 30 \\ x = -9 \\ y+z = -10+t \end{cases} && L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\
&\iff \begin{cases} t = 15 \\ x = -9 \\ y = 5-z \end{cases} \\
\mathcal{S} &= \{(-9, 5-z, z, 15), z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 3x+2y = 14 \\ x-2z = 14 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+y+z = 1 \\ -y-3z = 11 \\ -y-3z = 13 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
\mathcal{S} &= \emptyset
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} -x+2y+3z = 2 \\ 4x+5y+6z = 0 \\ 7x+8y+9z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -x+2y+3z = 2 \\ 5x+3y+3z = -2 \\ 3x+3y+3z = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \\
&\iff \begin{cases} -x+2y+3z = 2 \\ 2x = -2 \\ x+y+z = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array} \\
&\iff \begin{cases} 2y+3z = 1 \\ x = -1 \\ y+z = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} z = -1 \\ x = -1 \\ y+z = 2 \end{cases} && L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\
\mathcal{S} &= \{(-1, 2, -1)\}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3x-4y+2z+t = 1 \\ y+z-t = 0 \\ -3x+6y-3t = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x-4y+2z+t = 1 \\ y+z-t = 0 \\ 2y+2z-2t = 0 \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} 3x = 1+4y-2z-t \\ y = t-z \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} + t - 2z \\ y = t - z \end{cases} \\
\mathcal{S} &= \left\{ \left(\frac{1}{3} - 2z + t, t - z, z, t \right), z, t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

3 Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en fonction du paramètre réel m , les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} (1+m^2)x - 3y = 5 \\ 4y + 3z = 8 \\ mz = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my - mz = m \\ x - y + mz = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 6y - 4z = 2 \\ -3x - 9y + 6z = m - 5 \end{cases}$$

$$1. (S) : \begin{cases} (1+m^2)x - 3y = 5 \\ 4y + 3z = 8 \\ mz = 4 \end{cases}$$

• 1er cas : $m = 0$

$$(S) \iff \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4y + 3z = 8 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

$$S = \emptyset$$

• 2 me cas : $m \neq 0$

$$(S) \iff \begin{cases} (1+m^2)x = 5 + 3y \\ 4y = 8 - 3z \\ z = \frac{4}{m} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{11m - 9}{m(1+m^2)} \\ y = \frac{2m - 3}{m} \\ z = \frac{4}{m} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{11m - 9}{m(1+m^2)}, \frac{2m - 3}{m}, \frac{4}{m} \right) \right\}$$

$$2. \begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my - mz = m \\ x - y + mz = 1 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ x + my - mz = m \\ mx + y + z = m^2 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ (m+1)y - 2mz = m - 1 \\ (1+m)y + (1-m^2)z = m^2 - m \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ (m+1)y - 2mz = m - 1 \\ (1-m^2+2m)z = m^2 - 2m + 1 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$1 - m^2 + 2m = 0 \iff m^2 - 2m - 1 = 0 \iff (m = 1 + \sqrt{2}) \text{ ou } (m = 1 - \sqrt{2}).$$

1er cas : $m = 1 + \sqrt{2}$.

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ (m+1)y - 2mz = m - 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

$$S = \emptyset$$

2ème cas : $m = 1 - \sqrt{2}$.

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ (m+1)y - 2mz = m-1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

$$S = \emptyset$$

3ème cas : $1 - m^2 + 2m \neq 0$.

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ (m+1)y - 2mz = m-1 \\ z = \frac{m^2 - 2m + 1}{-m^2 + 2m + 1} = \frac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ (m+1)y = m-1 + \frac{2m(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \\ z = \frac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ (m+1)y = \frac{(m-1)(m^2+1)}{-m^2 + 2m + 1} \\ z = \frac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{cases}$$

Cas A : $m = -1$.

Alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ 0 = 2 \\ z = \frac{(m-1)^2}{-m^2 + 2m + 1} \end{cases}$$

$$S = \emptyset$$

Cas B : $m \neq -1$.

Alors :

$$(S) \iff \begin{cases} x = 1 + y - mz \\ y = \frac{(m-1)(m^2+1)}{(-m^2+2m+1)(m+1)} \\ z = \frac{(m-1)^2}{-m^2+2m+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{m(-m^3+m^2+m+3)}{(m+1)(-m^2+2m+1)} \\ y = \frac{(m-1)(m^2+1)}{(-m^2+2m+1)(m+1)} \\ z = \frac{(m-1)^2}{-m^2+2m+1} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{m(-m^3+m^2+m+3)}{(m+1)(-m^2+2m+1)}, \frac{(m-1)(m^2+1)}{(-m^2+2m+1)(m+1)}, \frac{(m-1)^2}{-m^2+2m+1} \right) \right\}$$

3.

$$\begin{aligned}
 (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 6y - 4z = 2 \\ -3x - 9y + 6z = m - 5 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4y - 6z = -2 \\ -6y + 9z = m + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y - 3z = -1 \\ -6y + 9z = m + 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y - 3z = -1 \\ 0 = m - 2 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2
 \end{aligned}$$

1er cas : si $m \neq 2$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

2ème cas : si $m = 2$, alors on a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y - 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}z \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}z, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

4 Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \quad \frac{2x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

Il suffit simplement de choisir a , b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \quad 2x+1 = a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)$$

autrement dit tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \quad 2x+1 = (a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a$$

Il suffit en fait de prendre a , b , c tels que :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=2 \\ 2a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1/2 \\ b=1 \\ c=-3/2 \end{cases}$$

5 Résoudre le système suivant dans \mathbb{R}^3 , en fonction des paramètres λ et μ :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = \lambda \\ -x + 2y + z = \mu \end{cases}$$

Soient λ, μ deux réels quelconques. Alors

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = \lambda \\ -x + 2y + z = \mu \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y = 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + z = \lambda - 4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 3y + 2z = \mu + 2 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - z \\ y = -1 \\ z = \lambda - 5 \\ 2z = \mu + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - \lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda - 5 \\ 0 = \mu - 2\lambda + 15 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

1er cas : $\mu - 2\lambda + 15 \neq 0$. Alors, le système n'admet pas de solution.

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

2ème cas : $\mu - 2\lambda + 15 = 0$. Alors, le système admet une unique solution :

$$\mathcal{S} = \{(8 - \lambda, -1, \lambda - 5)\}$$

6 Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, x - 3y) \end{array}$ est surjective.

Nous devons montrer que pour tout élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (espace d'arrivée), il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(2x + y, x - 3y) = (a, b)$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Il nous faut montrer que le système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ admet au moins une solution :

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x - 3y = b \end{cases}$$

Par la méthode du Pivot de Gauss, on a donc :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} 2x + y = a \\ x - 3y = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = a \\ -7y = 2b - a \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{3a + b}{7} = a \\ y = \frac{a - 2b}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le système admet comme ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3a + b}{7}, \frac{a - 2b}{7}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc en particulier, le système admet bien au moins une solution.

Ainsi, tout élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ admet au moins un antécédent par l'application f dans \mathbb{R}^3 . Ainsi, f est surjective.

7 Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et $g(\mathbb{R}^3)$ où :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, -x + 2y, 5x - y) \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y + z, x - 2y) \end{array}$$

1.

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}^2) &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (a, b, c)\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - y, -x + 2y, 5x - y) = (a, b, c)\} \end{aligned}$$

Ainsi, $f(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le système suivant admette au moins une solution :

$$(S) \iff \begin{cases} x - y = a \\ -x + 2y = b \\ 5x - y = c \end{cases}$$

Par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x - y = a \\ y = a + b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 4y = c - 5a & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2a + b \\ y = a + b \\ 0 = c - 9a - 4b \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que le système admet une solution si et seulement si $9a + 4b - c = 0$.

Il s'agit d'une équation à trois inconnues, qui admet une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(a, b, 9a + 4b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

Récapitulons :

$$\begin{aligned} (a, b, c) \in f(\mathbb{R}^2) &\iff \text{Le système } (S) \text{ admet au moins une solution} \\ &\iff 9a + 4b - c = 0 \\ &\iff (a, b, c) \in \{(a, b, 9a + 4b), a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Donc

$$f(\mathbb{R}^2) = \{(a, b, 9a + 4b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

2.

$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}^3) &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / \exists(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (a, b)\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / \exists(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (2x + y + z, x - 2y) = (a, b)\} \end{aligned}$$

Ainsi, $g(\mathbb{R}^3)$ est l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que le système suivant admette au moins une solution :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + y + z = a \\ x - 2y = b \end{cases}$$

Si on ordonne les variables de cette façon (z, y, x) , on a un système échelonné, on détermine facilement ses solutions :

$$(S) \iff \begin{cases} z + y + 2x = a \\ x - 2y = b \end{cases} \iff \begin{cases} z = a - 2b - 5y \\ x = b + 2y \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S) est $\{(b + 2y, y, a - 2b - 5y), y \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, il y a toujours des solutions (même une infinité), ceci quels que soient a et b . Donc g est surjective,

$$g(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$$

8 Dans \mathbb{R}^3 , le vecteur $(-6, -17, 17)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $((2, 1, 3), (3, 5, -2))$?

On cherche s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{pmatrix} -6 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -6 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} -6 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a + 5b \\ 3a - 2b \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a + 5b = -17 \\ 2a + 3b = -6 \\ 3a - 2b = 17 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + 5b = -17 \\ -7b = 28 \\ -17b = 4 \times 17 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a donc : $(-6, -17, 17) \in \text{Vect}((2, 1, 3), (3, 5, -2))$

9 Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels ou non :

1. $E_1 = \{(x + y, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3, x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / e^x e^y = 0\}$
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z(x^2 + y^2) = 0\}$
6. $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 0\}$.

1. 1ère méthode.

- $E_1 \subset \mathbb{R}^3$
- Le vecteur nul $\vec{0} = (0, 0, 0)$ appartient à E_1 (il suffit de choisir $x = y = 0$), donc en particulier $E_1 \neq \emptyset$.
- Soit $\vec{u} = (x + y, x - y, 2y) \in E_1$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$)
Soit $\vec{v} = (x' + y', x' - y', 2y') \in E_1$ (avec $x', y' \in \mathbb{R}$)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A-t-on encore $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in E_1$? On a :

$$\begin{aligned} \lambda \vec{u} + \vec{v} &= \lambda(x + y, x - y, 2y) + (x' + y', x' - y', 2y') \\ &= (\lambda(x + y) + (x' + y'), \lambda(x - y) + (x' - y'), \lambda 2y + 2y') \\ &= ((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') - (\lambda y + y'), 2(\lambda y + y')) \in E_1 \end{aligned}$$

L'ensemble E_1 est donc stable par combinaison linéaire.

On a donc montré que E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , donc c'est un espace vectoriel.

2ème méthode :

$$E_1 = \{(x + y, x - y, 2y), x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 0) + y(1, -1, 2), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, -1, 2))$$

donc E_1 apparaît directement comme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , (celui engendré par $(1, 1, 0)$ et $(1, -1, 2)$), donc c'est un espace vectoriel.

2. 1ère méthode.

- $E_2 \subset \mathbb{R}^3$
- Le vecteur nul $\vec{0} = (0, 0, 0)$ appartient à E_2 puisque $0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$, donc en particulier $E_2 \neq \emptyset$.
- Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in E_2$: on a $x + 2y - 3z = 0$
Soit $\vec{v} = (x', y', z') \in E_2$: on a $x' + 2y' - 3z' = 0$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A-t-on encore $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in E_2$? On a : $\lambda \vec{u} + \vec{v} = \lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$.
De plus :

$$(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - 3(\lambda z + z') = \lambda(x + 2y - 3z) + (x' + 2y' - 3z') = 0 + 0 = 0$$

donc E_2 est stable par combinaison linéaire.

On a donc montré que E_2 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , donc c'est un espace vectoriel.

2ème méthode :

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -2y + 3z\} \\ &= \{(-2y + 3z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1), y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1)) \end{aligned}$$

donc E_2 apparaît directement comme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , (celui engendré par $(-2, 1, 0)$ et $(3, 0, 1)$) donc c'est un espace vectoriel.

3. 1ère méthode.

- $E_3 \subset \mathbb{R}^3$
- Le vecteur nul $\vec{0} = (0, 0, 0)$ appartient à E_3 puisque $0 + 0 + 0 = 0$ et $2 \cdot 0 - 0 + 0 = 0$, donc en particulier $E_3 \neq \emptyset$.
- Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in E_3$: on a $x + y + z = 0$ et $2x - y + z = 0$
Soit $\vec{v} = (x', y', z') \in E_3$: on a $x' + y' + z' = 0$ et $2x' - y' + z' = 0$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A-t-on encore $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in E_3$? On a : $\lambda\vec{u} + \vec{v} = \lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$.
De plus :

$$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(x + y + z) + (x' + y' + z') = 0 + 0 = 0$$

et

$$2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(2x - y + z) + (2x' - y' + z') = 0 + 0 = 0$$

donc E_3 est stable par combinaison linéaire.

On a donc montré que E_3 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , donc c'est un espace vectoriel.

2ème méthode :

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x + y = -z \\ 2x - y = -z \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x + y = -z \\ 3x = -2z \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} y = -\frac{1}{3}z \\ x = \frac{2}{3}z \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{1}{3}z(-2, -1, 3) \right\} = \text{Vect}((-2, -1, 3)) \end{aligned}$$

donc E_3 apparaît directement comme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , donc c'est un espace vectoriel.

4. E_4 n'est pas un espace vectoriel puisqu'il est vide (et il ne contient donc pas le vecteur nul $(0, 0, 0)$).
5. E_5 n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par combinaison linéaire.
Par exemple, $(0, 0, 1) \in E_5$, $(1, 1, 0) \in E_5$, mais leur somme $(1, 1, 1)$ n'appartient pas à E_5 .
6. $E_6 = \{(0, 0)\}$, c'est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

10 Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, 6, 9), (1, 4, 6), (3, 6, 2))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

Il s'agit de montrer ici que :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1, 6, 9), (1, 4, 6), (3, 6, 2))$$

i.e. que tout vecteur de \mathbb{R}^3 s'écrit comme une combinaison linéaire de $(1, 6, 9)$, de $(1, 4, 6)$ et $(3, 6, 2)$.

Prenons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On cherche trois réels x, y, z tels que :

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= x(1, 6, 9) + y(1, 4, 6) + z(3, 6, 2) \\ \Leftrightarrow (a, b, c) &= (x + y + 3z, 6x + 4y + 6z, 9x + 6y + 2z) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = a \\ 6x + 4y + 6z = b \\ 9x + 6y + 2z = c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = a \\ -2y - 12z = b - 6a & L_2 \leftrightarrow L_2 - 6L_1 \\ -3y - 25z = c - 9a & L_3 \leftrightarrow L_3 - 9L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = a \\ -2y - 12z = b - 6a & L_2 \leftrightarrow L_2 - 6L_1 \\ -14z = 2(c - 9a) - 3(b - 6a) & L_3 \leftrightarrow 2L_3 - 3L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a un système de Cramer, qui admet donc au moins une solution (en réalité, une seule!). Le système étant compatible, la famille \mathcal{B} est bien génératrice de \mathbb{R}^3 .

11 Pour les espaces vectoriels suivants, déterminer une famille génératrice :

1. $A = \{(x - y, x + y, 2x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$
3. $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
4. $D = \{(a + 2b, a - b, 3b, 2a), a, b \in \mathbb{R}\}$
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y = y + 6z \text{ et } y + 3z = -2x\}$

1. $A = \text{Vect}((1, 1, 2), (-1, 1, -3))$

2. $B = \text{Vect}((1, 1, 1))$

3.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z + t \\ y = -z + t \end{cases}$$

Ainsi :

$$C = \left\{ \left(-\frac{3}{2}z + t, -z + t, z, t \right), z, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\left(\frac{-3}{2}, -1, 1, 0 \right), (1, 1, 0, 1) \right)$$

4. $D = \text{Vect}((1, 1, 0, 2), (2, -1, 3, 0)).$

5.

$$\begin{cases} -x + 2y = y + 6z \\ y + 3z = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 6z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 6z = 0 \\ 3y - 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3z \\ y = 3z \end{cases}$$

Ainsi :

$$E = \{(-3z, 3z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-3, 3, 1))$$

12 Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver deux familles génératrices différentes :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$

2. $F = \{(-2y + z, y - z, y) \in \mathbb{R}^3, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

1. On peut écrire :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y - z\} = \{(2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

mais aussi :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x + 2y\} = \{(x, y, -x + 2y), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 2))$$

2. On a :

$$F = \text{Vect}((-2, 1, 1), (1, -1, 0))$$

mais on peut par exemple changer $(1, -1, 0)$ pour $(1, -1, 0) + (-2, 1, 1) = (-1, 0, 1)$ dans la famille génératrice, on a donc :

$$F = \text{Vect}((-2, 1, 1), (-1, 0, 1))$$

13 Vérifier que chacun des espaces vectoriels suivants est un plan de \mathbb{R}^3 et en donner une équation cartésienne.

1. $A = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 2, 0))$
2. $B = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 3, 0))$
3. $C = \text{Vect}((1, 1, 2), (0, 1, -1))$
4. $D = \text{Vect}((1, -1, 1), (2, 1, 1), (0, -3, 1))$

1. A est engendré par deux vecteurs non colinéaires, donc on a bien $\dim(A) = 2$: A est un plan. De plus,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in A &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} / (x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(0, 2, 0), \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} a = x \\ 2b = y \\ 0 = z \end{cases} \\ &\iff z = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$$

2. B est engendré par deux vecteurs non colinéaires, donc on a bien $\dim(B) = 2$: B est un plan. De plus,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in B &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / (x, y, z) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 3, 0) \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 3\mu = y \\ \lambda = z \end{cases} \\ &\iff z + 2\frac{y}{3} = x \\ &\iff 3x - 2y - 3z = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y - 3z = 0\}$$

3. C est engendré par deux vecteurs non colinéaires, donc on a bien $\dim(C) = 2$: C est un plan. De plus,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in C &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / (x, y, z) = \alpha(1, 1, 2) + \beta(0, 1, -1) \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \alpha = x \\ \alpha + \beta = y \\ 2\alpha - \beta = z \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y - x \\ 2x - (y - x) = z \end{cases} \\ &\iff 3x - y - z = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y - z = 0\}$$

4. D est engendré a priori par trois vecteurs, mais $(0, -3, 1) = 2(1, -1, 1) - (2, 1, 1)$, donc en réalité :

$$D = \text{Vect}((1, -1, 1), (2, 1, 1))$$

Ainsi, D est engendré par deux vecteurs non colinéaires, donc on a bien $\dim(D) = 2$: D est un plan. De plus,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in D &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / (x, y, z) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(2, 1, 1) \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -\alpha + \beta = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 3\beta = y + x \\ -\beta = z - x \end{cases} \\ &\iff -3(z - x) = y + x \iff 2x - y - 3z = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y - 3z = 0\}$$

14 Écrire chacun des sous-espaces de \mathbb{R}^4 suivants sous les trois formes d'écriture : soit par un système d'équations cartésiennes (comme A), soit par un paramétrage (comme B), soit par une famille génératrice (comme C) :

1. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$

2. $B = \{(a - b + 3c, c, a + b, 0), a, b, c \in \mathbb{R}\}$

3. $C = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, -1))$

1.

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z, t) / \begin{cases} x = 2z \\ t = y + z \end{cases} \right\} \\ &= \{(2z, y, z, y + z), y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((0, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1)) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= \{(a - b + 3c, c, a + b, 0), a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0), (3, 1, 0, 0)) \end{aligned}$$

et

$$(x, y, z, t) \in B \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R} / \begin{cases} a - b + 3c = x \\ c = y \\ a + b = z \\ 0 = t \end{cases} \iff t = 0$$

donc :

$$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / t = 0\}$$

3.

$$\begin{aligned} C &= \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, -1)) \\ &= \{(a, 2a + b, -a + 3b, -b), a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

et

$$(x, y, z, t) \in C \iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} a = x \\ 2a + b = y \\ -a + 3b = z \\ -b = t \end{cases} \iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \\ -x + 3(y - 2x) = z \\ -(y - 2x) = t \end{cases} \iff \begin{cases} 7x - 3y + z = 0 \\ 2x - y - t = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 7x - 3y + z = 0 \text{ et } 2x - y - t = 0\}$$

15 Dans \mathbb{R}^3 , on note $u_1 = (1, -1, 1)$ et $u_2 = (1, 1, 0)$, $v_1 = (1, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -5, 3)$.

Montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

A priori, puisqu'on veut démontrer que deux ensembles sont égaux, la méthode de base est la suivante : on fait une double inclusion :

- Montrons que $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \subset \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

On a $\vec{u}_1 = (1, -1, 1) = \frac{1}{2}(1, 3, -1) + \frac{1}{2}(1, -5, 3)$, donc :

$$\vec{u}_1 \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

On a $\vec{u}_2 = (1, 1, 0) = \frac{3}{4}(1, 3, -1) + \frac{1}{4}(1, -5, 3)$, donc :

$$\vec{u}_2 \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Or, $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est un sous-espace vectoriel, donc toute combinaison linéaire de \vec{u}_1 et de \vec{u}_2 doit encore être dans $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Ainsi :

$$\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \subset \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

- Montrons que $\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \subset \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

On a $\vec{v}_1 = (1, 3, -1) = -(1, -1, 1) + 2(1, 1, 0)$, donc :

$$\vec{v}_1 \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

On a $\vec{v}_2 = (1, -5, 3) = 3(1, -1, 1) - 2(1, 1, 0)$, donc :

$$\vec{v}_2 \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

Or, $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est un sous-espace vectoriel, donc toute combinaison linéaire de \vec{v}_1 et de \vec{v}_2 doit encore être dans $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Ainsi :

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \subset \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

Finalement, on a donc $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

2ème méthode :

$$(x, y, z) \in \text{Vect}(u_1, u_2) \iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} a + b = x \\ -a + b = y \\ a = z \end{cases} \iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} a = z \\ b = x - z \\ -(z) + (x - z) = y \end{cases} \iff x - y - 2z = 0$$

et

$$(x, y, z) \in \text{Vect}(v_1, v_2) \iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} a + b = x \\ 3a - 5b = y \\ -a + 3b = z \end{cases} \iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} 4b = x + z \\ 4a = 3x - z \\ 3(3x - z) - 5(x + z) = 4y \end{cases} \iff x - y - 2z = 0$$

Donc :

$$\text{Vect}(u_1, u_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - 2z = 0\} = \text{Vect}(v_1, v_2)$$

3ème méthode : (encore plus rapide) : cf exercice 23 en utilisant les dimensions.

16 Dans \mathbb{R}^3 , on note $u_1 = (-1, 1, -1)$ et $u_2 = (1, 2, 4)$, $v_1 = (3, -1, a)$ et $v_2 = (2, 3, b)$.
Déterminer a et b dans \mathbb{R} tels que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

$$(x, y, z) \in \text{Vect}(u_1, u_2) \iff \begin{cases} x = -a + b \\ y = a + 2b \\ z = -a + 4b \end{cases} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \iff 2x + y - z = 0$$

Ainsi :

$$\text{Vect}(u_1, u_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$$

Pour que $v_1 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$, on doit imposer que $2(3) + (-1) - (a) = 0 \iff a = 5$

Pour que $v_2 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$, on doit imposer que $2(2) + (3) - (b) = 0 \iff b = 7$.

Donc, si a et b vérifient $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$, on n'a qu'une seule possibilité : $a = 5$ et $b = 7$.

Réciproquement, si on pose $a = 5$ et $b = 7$, alors on vérifie qu'on a bien également :

$$\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}((3, -1, 5), (2, 3, 7)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\} = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

17 Dans \mathbb{R}^3 , on note $u = (1, 3, 1)$, $v = (2, 1, 2)$ et $w = (m, m + 1, 3m + 2)$, où $m \in \mathbb{R}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que $w \in \text{Vect}(u, v)$.

$$w \in \text{Vect}(u, v) \iff \exists a, b \in \mathbb{R} / w = au + bv$$

$$\iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} m \\ m + 1 \\ 3m + 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} m = a + 2b \\ m + 1 = 3a + b & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 3m + 2 = a + 2b & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} a + 2b = m \\ -5b = -2m + 1 \\ 0 = 2m + 2 \end{cases}$$

$$\iff 2m + 2 = 0$$

$$\iff m = -1$$

18 Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $((1, 2), (3, 3))$ dans \mathbb{R}^2 .
2. $((1, 2, 0), (0, 2, 3))$ dans \mathbb{R}^3 .
3. $((1, -1, 0), (0, 2, 1), (-2, 0, 1))$ dans \mathbb{R}^3 .
4. $((2, -1, 1), (1, -1, 3), (-3, 1, 1), (1, 2, 3))$ dans \mathbb{R}^3 .
5. $((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 8, 16))$ dans \mathbb{R}^4 .

1. Dans \mathbb{R}^2 , $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc la famille $((1, 2), (3, 3))$ est libre.

2. Dans \mathbb{R}^3 , $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc la famille $((1, 2, 0), (0, 2, 3))$ est libre.

3. Pour a, b, c trois réels, on a :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a - 2c = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2c \\ a = 2b \\ a = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

Donc la famille $((1, -1, 0), (0, 2, 1), (-2, 0, 1))$ est libre dans \mathbb{R}^3 .

4. L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 est de dimension 3, donc toute famille d'au moins 4 vecteurs est nécessairement liée.

La famille $((2, -1, 1), (1, -1, 3), (-3, 1, 1), (1, 2, 3))$ est donc liée dans \mathbb{R}^3 .

On peut par exemple trouver que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Pour a, b, c réels, on a :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \\ a + 3b + 8c = 0 \\ a + 4b + 16c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

donc la famille $((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 8, 16))$ est libre dans \mathbb{R}^4 .

19 Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $A = \{(x - y + z, 3x + 6z, -2x + 4y), x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = y \text{ et } y = 3z\}$
3. $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y = y + 6z = 3z - 2x\}$

$$1. A = \left\{ \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x + 6z \\ -2x + 4y \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Or, } \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ donc : } A = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left((1, 3, -2), (-1, 0, 4) \right)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de A , et donc $\boxed{\dim(A) = 2}$.

$$2. B = \left\{ \begin{pmatrix} y/2 \\ y \\ y/3 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) = Vect \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left((3, 6, 2) \right)$ est libre (le vecteur est non nul), c'est donc une base de B , et donc $\boxed{\dim(B) = 1}$.

$$3. C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x - y - z \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille génératrice proposée est clairement libre (aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres), c'est donc une base de C , et donc $\boxed{\dim(C) = 3}$.

$$4. D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left((1, 0, 2), (0, 1, 1) \right)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de D , et donc $\boxed{\dim(D) = 2}$.

$$5. E = \left\{ \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ 3y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left((3, 1, 3) \right)$ est libre (le vecteur est non nul), c'est donc une base de E , et donc $\boxed{\dim(E) = 1}$.

$$6. F = \left\{ \begin{pmatrix} -3z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ donc } ((-3, 3, 1)) \text{ base de } F \text{ et } \boxed{\dim(F) = 1}.$$

20 Déterminer si la famille donnée est une famille libre / famille génératrice / base de l'espace donné :

1. $((1, 0, -2, 5), (7, -4, 3, 1), (0, 1, -1, 0), (1, -3, 0, 2))$ dans \mathbb{R}^4
2. $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$ dans \mathbb{R}^3
3. $((0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 0, -2))$ dans \mathbb{R}^4 .
4. $((1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2))$ dans \mathbb{R}^3 .
5. $((1, 2, 3), (-1, 2, 5), (-1, 10, 21))$ dans \mathbb{R}^3 .
6. $((1, 2), (2, 1), (-1, 4))$ dans \mathbb{R}^2

1. On sait que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

La famille comportant exactement 4 éléments, elle peut être libre / génératrice / base, l'un impliquant tous les autres.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a(1, 0, -2, 5) + b(7, -4, 3, 1) + c(0, 1, -1, 0) + d(1, -3, 0, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

Alors :

$$\begin{cases} a + 7b + d = 0 \\ -4b + c - 3d = 0 \\ -2a + 3b - c = 0 \\ 5a + b + 2d = 0 \end{cases} \implies \dots \implies a = b = c = d = 0$$

Donc la famille est libre, et de cardinal 4 dans \mathbb{R}^4 , donc c'est une base de \mathbb{R}^4 (elle est donc aussi génératrice).

2. \mathbb{R}^3 est de dimension 3. La famille $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$ est clairement libre (deux vecteurs non colinéaires), mais n'est pas génératrice (il n'y a pas assez de vecteurs, il faudrait au moins 3 vecteurs puisqu'on est en dimension 3).

3. \mathbb{R}^4 est de dimension 4. La famille proposée n'est pas génératrice, car pas assez de vecteurs.

Elle est libre car :

- $((0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 2))$ est libre (deux vecteurs non colinéaires).
- $(2, 0, 0, -2)$ n'est pas combinaison linéaire de $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 1, 1, 2)$ (cf première coordonnée).

4. \mathbb{R}^3 est de dimension 3 et la famille proposée comporte trois vecteurs. Tout est possible.

$$a(1, 2, 3) + b(2, 3, 1) + c(3, 1, 2) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \\ 3a + b + 2c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

donc la famille est libre, de cardinal 3 dans \mathbb{R}^3 , c'est donc une base de \mathbb{R}^3 (et elle est donc génératrice aussi)

5. $(-1, 10, 21) = 2(1, 2, 3) + 3(-1, 2, 5)$, donc la famille est liée dans \mathbb{R}^3 .

Ainsi, $\text{Vect}((1, 2, 3), (-1, 2, 5), (-1, 10, 21)) = \text{Vect}((1, 2, 3), (-1, 2, 5)) \neq \mathbb{R}^3$, donc la famille n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 .

6. $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, donc la famille comportant 3 vecteurs, elle est nécessairement liée.

Les deux premiers vecteurs $((1, 2), (2, 1))$ forment une famille libre (car non colinéaires), de cardinal 2, donc c'est une base de \mathbb{R}^2 , donc la famille $((1, 2), (2, 1))$ est génératrice de \mathbb{R}^2 , donc la famille $((1, 2), (2, 1), (-1, 4))$ est, elle aussi, génératrice de \mathbb{R}^2 .

21

- Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est libre, et la compléter une base de E .
 - Dans \mathbb{R}^3 , $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1))$
 - Dans \mathbb{R}^4 , $\mathcal{F} = ((1, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$
- Pour chacune des familles suivantes, montrer qu'elle est génératrice, et en extraire une base de E .
 - Dans \mathbb{R}^2 , $\mathcal{F} = ((2, 3), (1, -1), (1, 2))$
 - Dans \mathbb{R}^3 , $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 2), (1, 3, -4))$

1. (a) $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1))$ est libre, puisque les deux vecteurs sont non colinéaires.
 Pour compléter la famille libre en une base, il suffit de prendre un vecteur qui ne soit pas combinaison linéaire de $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$.
 Par exemple $(0, 0, 1)$ convient :

$$(0, 0, 1) = a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases} : \text{impossible}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$ est libre, de cardinal 3, dans \mathbb{R}^3 qui est de dimension 3, c'est une base de \mathbb{R}^3 .

- (b) $\mathcal{F} = ((1, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$ est libre car les deux derniers ne sont pas colinéaires, et le premier n'est pas combinaison linéaire des deux derniers (cf 3 me coordonnée).
 Pour compléter la famille libre en une base, il suffit de prendre un vecteur qui ne soit pas combinaison linéaire des trois vecteurs.
 Par exemple $(1, 0, 0, 0)$ convient :

$$(1, 0, 0, 0) = a(1, 1, -1, -1) + b(0, 1, 0, 1) + c(1, 1, 0, 0) \iff \begin{cases} a + c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ -a = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ 1 = 0 \end{cases} : \text{impossible}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = ((1, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0))$ est libre et de cardinal 4, c'est une base de \mathbb{R}^4 .

2. (a) Pour tout vecteur (a, b) de \mathbb{R}^2 , on peut trouver $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 2x + y + z \\ b = 3x - y + 2z \end{cases}$$

(le système contient deux équations (non incompatibles) avec trois inconnues, donc il y a toujours une infinité de solutions).

La famille est donc bien génératrice de \mathbb{R}^2 .

Par exemple, $((2, 3), (1, -1))$ est une famille extraite de \mathcal{F} , qui est libre (non-colinéaires) et de cardinal 2, donc c'est une base de \mathbb{R}^2 .

(b) Pour tout vecteur (a, b, c) de \mathbb{R}^3 , on peut trouver $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = x + y + z + t \\ b = x + y - z + 3t \\ c = x - y + 2z - 4t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z + t = a \\ -2y + z - 5t = c - a \\ -2z + 2t = b - a \end{cases}$$

Le système est triangulaire, avec plus d'inconnues que d'équations, donc admet toujours une infinité de solutions. La famille est donc bien génératrice de \mathbb{R}^3 .

Prenons par exemple $\mathcal{B} = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1)$, $w = (1, -1, 2)$, famille extraite de \mathcal{F} .

(u, v) est libre (car non colinéaires), et $w \notin \text{Vect}(u, v)$ (à cause des deux premières coordonnées), donc (u, v, w) est libre, et de cardinal 3, c'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

22 Dans \mathbb{R}^3 , on note $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (m^2, 2m, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. La famille (u, v) est-elle libre ? génératrice de \mathbb{R}^3 ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que (u, v, w) soit une base de \mathbb{R}^3 .

1. (u, v) est libre car u et v ne sont pas colinéaires.

(u, v) n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 puisqu'elle ne comporte pas assez de vecteurs (il en faudrait au moins 3 pour engendrer \mathbb{R}^3).

2. Puisque la famille (u, v, w) est de cardinal 3, on a :

$$\begin{aligned} (u, v, w) \text{ base de } \mathbb{R}^3 &\iff (u, v, w) \text{ libre} \\ &\iff w \text{ n'est pas combinaison linéaire de } u \text{ et } v \end{aligned}$$

Or, à l'inverse :

$$\begin{aligned} w \text{ est combinaison linéaire de } u \text{ et } v &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} / w = au + bv \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} m^2 \\ 2m \\ m \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} a + 4b = m^2 \\ 2a + 5b = 2m \\ 3a + 6b = m \end{cases} \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R} / \begin{cases} a + 4b = m^2 \\ -3b = 2m - 2m^2 \\ -6b = m - 3m^2 \end{cases} \\ &\iff 2(2m - 2m^2) = m - 3m^2 \\ &\iff m^2 - 3m = 0 \\ &\iff m = 0 \text{ ou } m = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, si $m = 0$ ou $m = 3$, la famille (u, v, w) est liée.

(Si $m = 0$, c'est évident. Si $m = 3$, alors on aurait $(9, 6, 3) = -7(1, 2, 3) + 4(4, 5, 6)$).

Si $m \notin \{0, 3\}$, la famille (u, v, w) est libre, donc c'est une base de \mathbb{R}^3

$$(u, v, w) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \iff m \notin \{0, 3\}$$

23 Dans \mathbb{R}^3 , on donne : $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$ et $G = \text{Vect}((1, -2, 0), (1, 1, 3))$.

Montrer que $F = G$.

Remarquons que $\dim(F) = \dim(G) = 2$ puisque ce sont des plans (engendrés chacun par deux vecteurs non colinéaires).

On a :

$$F = \text{Vect} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / 2x + y - z = 0 \right\}$$

Remarquons à présent simplement que $(1, -2, 0) \in F$ (puisqu'il vérifie l'équation $2x + y - z = 0$

Et également $(1, 1, 3) \in F$ (puisqu'on a aussi $2x + y - z = 0$).

Donc, F étant stable par combinaison linéaire :

$$G = \text{Vect}((1, -2, 0), (1, 1, 3)) \subset F$$

Finalement $G \subset F$, avec $\dim(G) = \dim(F)$, donc $G = F$.

24 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$.

Vérifier la formule de Grassmann.

- F et G sont deux hyperplans dans \mathbb{R}^3 , donc de dimension 2 chacun.

Plus précisément, on peut montrer par exemple que :

$$F = \text{Vect} \left(\left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect} \left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

- Déterminons $F \cap G$.

On voit déjà que $(-1, 0, 1) \in F \cap G$, donc $\dim(F \cap G) \geq 1$.

Et on sait par ailleurs que $F \cap G \subset F$ (et $F \cap G \subset G$), donc on a $\dim(F \cap G) \leq 2$.

Si on avait $\dim(F \cap G) = 2$, on aurait $F \cap G \subset F$ avec $\dim(F \cap G) = \dim(F)$, donc $F \cap G = F$, et de même $F \cap G = G$, donc $F = G$. Or, c'est absurde, par exemple $(-1, 1, 0) \in F$ mais $(-1, 1, 0) \notin G$.

Donc $F \cap G$ est de dimension 1, et on a donc nécessairement :

$$F \cap G = \text{Vect} \left(\left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

- Déterminons $F + G$.

On a $F \subset (F + G) \subset \mathbb{R}^3$ (et $G \subset (F + G) \subset \mathbb{R}^3$), donc nécessairement $2 \leq \dim(F + G) \leq 3$.

Si on avait $\dim(F + G) = 2$, on aurait nécessairement $F = F + G$ et $G = F + G$, donc $F = G$, ce qui est absurde.

Donc nécessairement $\dim(F + G) = 3$, avec $F + G \subset \mathbb{R}^3$, donc $F + G = \mathbb{R}^3$ tout entier.

$$F + G = \mathbb{R}^3$$

- Finalement :

$$\dim(F) = \dim(G) = 2, \quad \dim(F + G) = 3, \quad \dim(F \cap G) = 1$$

on a bien :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

25 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((2, 1, 0))$.

Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils en somme directe ?

F est un hyperplan dans \mathbb{R}^3 , donc $\dim(F) = 2$.

Et clairement $\dim(G) = 1$.

On sait que $(F \cap G) \subset G$, donc nécessairement $0 \leq \dim(F \cap G) \leq \dim(G) = 1$.

Si on avait $\dim(F \cap G) = 1$, alors on aurait $F \cap G = G$ (puisque $F \cap G \subset G$, et $\dim(F \cap G) = \dim(G)$).

Mais alors on aurait $G \subset F$.

Or, le vecteur $(2, 1, 0) \in G$, mais $(2, 1, 0) \notin F$, on ne peut donc pas avoir $G \subset F$!

Donc nécessairement $\dim(F \cap G) = 0$, et donc :

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Ainsi, F et G sont en somme directe.

26 Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, -1, 1))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 1, 0))$.

Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils en somme directe ?

Remarquons directement que F et G ne peuvent pas être en somme directe ! S'ils l'étaient, on aurait :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} = 4$$

Or, $F + G \subset \mathbb{R}^3$ donc $\dim(F + G) \leq 3$: contradiction.

Ainsi, $F \cap G$ est de dimension au moins 1.

Ici, le plus simple est d'écrire les plans F et G sous forme cartésienne pour trouver $F \cap G$.

$$F = \text{Vect} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x - y = 0 \right\}$$

et

$$G = \text{Vect} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x - y + z = 0 \right\}$$

Donc :

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Donc on a bien $F \cap G \neq \{0\}$ et F et G ne sont pas en somme directe.

27 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.

Soit $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Puisque $\dim(G) = 1$, $F \cap G$ est de dimension 0 ou 1 (soit $F \cap G = \{0\}$, soit $F \cap G = G$) Or, $(1, 1, 1) \in G$, mais $(1, 1, 1) \notin F$, donc $F \cap G = \{0\}$

$$F \cap G = \{0\}$$

Les ensembles F et G sont donc en somme directe.

De plus, on a $F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$, donc $\dim(F) = 2$. On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

donc $F + G = \mathbb{R}^3$ et $\dim(F + G) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc :

$$F + G = \mathbb{R}^3$$

Finalement, on a donc montré que :

$$F \oplus G = \mathbb{R}^3$$

F et G sont donc supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

28 Soit $F = \text{Vect}((-1, 2, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y = -2z + t\}$. Déterminer une base et la dimension de F , de G et $F \cap G$.

F est de dimension 2, la famille génératrice proposée étant déjà libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est une base. G est un hyperplan de \mathbb{R}^4 , donc $\dim(G) = 3$, et on a :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2z + t \\ z \\ t \end{pmatrix}, x, z, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ce qui fournit une base de G .

$F \cap G \subset F$, donc $\dim(F \cap G) \leq 2$.

Si $\dim(F \cap G) = 2$, on aurait $F \cap G = F$, donc $F \subset G$ ce qui faux (par exemple $(-1, 2, 1, 0) \in F$ mais $(-1, 2, 1, 0) \notin G$).

Si $\dim(F \cap G) = 0$, on aurait avec Grassmann que $\dim(F + G) = 5$ ce qui est absurde, $F + G \subset \mathbb{R}^4$!

Donc nécessairement $\dim(F \cap G) = 1$.

Soit $u \in F : u = a(-1, 2, 1, 0) + b(-1, 2, 0, 1) = (-a - b, 2a + 2b, a, b)$. Alors :

$$u \in G \iff (2a + 2b) = -2(a) + (b) \iff 4a + b = 0 \iff b = -4a \iff u = (3a, -6a, a, -4a)$$

donc :

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 3a \\ -6a \\ a \\ -4a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

29 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$.

Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $F \oplus \text{Vect}(x) = E$.

On cherche donc un supplémentaire de F dans E sous la forme $\text{Vect}(x)$.

C'est cohérent au niveau des dimensions (car $\dim(F) = 2$ et $\dim(E) = 3$, donc un supplémentaire doit être de dimension 1).

En fait, il suffit de choisir un x qui ne soit pas dans $\text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$.

Par exemple, prenons $x = (1, 0, 0)$. Alors :

$$(1, 0, 0) = a(0, 1, 1) + b(1, 0, 2) \iff \begin{cases} 1 = b \\ 0 = a \\ 0 = a + 2b \end{cases} : \text{incompatible}$$

Ainsi, la famille $((0, 1, 1), (1, 0, 2))$ étant libre, la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 2))$ est libre encore puisqu'on ajoute un vecteur non combinaison linéaire des précédents. La famille obtenue est libre, de cardinal 3, dans E de dimension 3, c'est une base de E . On a donc :

$$E = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 2)) = F \oplus \text{Vect}(x)$$

La somme étant bien directe puisque la famille est libre, donc l'écriture dans la somme est unique.

30 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $F = \text{Vect}((1, 2, 2))$.

Trouver deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^3 tels que $F \oplus \text{Vect}(x, y) = E$.

On cherche donc un supplémentaire de F dans E sous la forme $\text{Vect}(x, y)$.

C'est cohérent au niveau des dimensions (car $\dim(F) = 1$ et $\dim(E) = 3$, donc un supplémentaire doit être de dimension 2).

En fait, il suffit de choisir un x qui ne soit pas dans $\text{Vect}((1, 2, 2))$, puis de choisir un y qui ne soit pas dans $\text{Vect}((1, 2, 2), x)$

Par exemple, prenons $x = (1, 0, 0)$. Alors, de manière claire x n'est pas colinéaire à $(1, 2, 2)$.

Ensuite, prenons $y = (0, 1, 0)$.

$$(0, 1, 0) = a(1, 2, 2) + b(1, 0, 0) \iff \begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = 2a \\ 0 = 2a \end{cases} : \text{incompatible}$$

Ainsi, la famille $((1, 2, 2), x)$ étant libre, la famille $((1, 2, 2), x, y)$ est libre encore puisqu'on ajoute un vecteur non combinaison linéaire des précédents. La famille obtenue est libre, de cardinal 3, dans E de dimension 3, c'est une base de E . On a donc :

$$E = \text{Vect}((1, 2, 2), (1, 0, 0), (0, 1, 0)) = F \oplus \text{Vect}(x, y)$$

La somme étant bien directe puisque la famille est libre, donc l'écriture dans la somme est unique.

31 Montrer que si (u, v, w) est une famille libre dans \mathbb{R}^n , il en est de même pour la famille $(u + v, v + w, w + u)$.

Supposons (u, v, w) libre. Montrons que $(u + v, v + w, w + u)$ est libre.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a(u + v) + b(v + w) + c(w + u) = \vec{0}$$

Alors :

$$(a + c)u + (a + b)v + (b + c)w = \vec{0}$$

Et puisque la famille (u, v, w) est libre., on en déduit que :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \implies a = b = c = 0$$

Donc la famille $(u + v, v + w, w + u)$ est libre.

32 Soit $n \geq 1$ et soit (u_1, \dots, u_n) une base de \mathbb{R}^n . On note pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_i = \sum_{k=1}^i u_k$.

1. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer u_j comme combinaison linéaire des y_i .
2. Montrer que (y_1, y_2, \dots, y_n) est une base de \mathbb{R}^n .
3. On suppose $n \geq 3$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $u_1 + u_2 - u_3$ dans la base (y_1, y_2, \dots, y_n) ?

1. On a $u_1 = y_1$, et pour tout j tel que $2 \leq j \leq n$, on a :

$$u_j = \sum_{k=1}^j u_k - \sum_{k=1}^{j-1} u_k = y_j - y_{j-1}$$

2. Par opérations élémentaires sur la famille génératrice :

$$\begin{aligned} & \text{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \\ &= \text{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n - y_{n-1}) \\ &= \text{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1} - y_{n-2}, y_n - y_{n-1}) \\ &= \vdots \\ &= \text{Vect}(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_n - y_{n-1}) \\ &= \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Donc (y_1, \dots, y_n) est génératrice de \mathbb{R}^n , de cardinal n , donc c'est une base de \mathbb{R}^n .

- 3.

$$u_1 + u_2 - u_3 = (y_1) + (y_2 - y_1) - (y_3 - y_2) = 2y_2 - y_3$$

donc on a :

$$u_1 + u_2 - u_3 = 0y_1 + 2y_2 - y_3 + 0y_4 + \dots + 0y_n$$

Les coordonnées de $u_1 + u_2 - u_3$ dans la base (y_1, y_2, \dots, y_n) sont donc $(0, 2, -1, 0, 0, \dots, 0)$.

33 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Soient F et G deux sev de \mathbb{R}^n .

\Leftarrow Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sev.
Si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$, donc $F \cup G$ est un sev.

\Rightarrow Supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Montrons qu'on a nécessairement $F \subset G$ ou $G \subset F$.

★ Soit F est inclus dans G .

★ Soit F n'est pas inclus dans G , mais alors montrons que dans ce cas-là $G \subset F$.

Par hypothèse, il existe un vecteur $x \in F$ tel que $x \notin G$.

Alors pour tout $y \in G$, $x + y \in F \cup G$, mais $x + y \notin G$ (car sinon $x = (x + y) - (y) \in G$ aussi).

Donc pour tout $y \in G$, on a $x + y \in F$, et donc $y = (x + y) - (x) \in F$.

Ainsi, $G \subset F$.

Finalement, dans tous les cas, soit $F \subset G$, soit $G \subset F$.

34 Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriel de \mathbb{R}^n tels que $\mathbb{R}^n = A \oplus B$ et $A \subset C$.

Montrer que $C = A \oplus (B \cap C)$.

- Déjà, montrons que A et $B \cap C$ sont en somme directe.

Soit $x \in A \cap (B \cap C)$. Alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$. Or, A et B sont en somme directe par hypothèse, donc $A \cap B = \{0\}$, donc $x = 0$.

Finalement, $A \cap (B \cap C) = \{0\}$, donc $A + (B \cap C) = A \oplus (B \cap C)$.

- Montrons à présent que $C = A + (B \cap C)$.

Par définition, $A \subset C$ et $(B \cap C) \subset C$, donc par somme, on a

$$A + (B \cap C) \subset C.$$

Réciproquement, si $x \in C$, alors $x \in \mathbb{R}^n = A \oplus B$. Donc on peut écrire :

$$x = y + z \quad \text{avec } y \in A, z \in B$$

mais $z = x - y$, avec $x \in C$ et $y \in A \subset C$, donc $(C \text{ sev}), z \in C$, donc $z \in B \cap C$.

Finalement, $x = y + z$ avec $y \in A$ et $z \in B \cap C$. Donc :

$$C \subset A + (B \cap C)$$

On a donc bien démontré que :

$$C = A \oplus (B \cap C)$$