Corrigé du TD sur les fonctions polynômiales :
Pour aller plus loin

Exercice 0 :

1. Avec la formule du binôme de Newton on trouve un polynôme de degré 12 et de coefficient dominant 1.
2. Avec la formule du binôme de Newton on trouve un polynôme de degré n-1 et de coefficient dominant 2n.
3. deg(P_3)= 2n et son coefficient dominant est 1.
4. deg(P_4)= n et son coefficient dominant est 1.

Exercice 1 :

On commence par chercher une racine évidente :

- -1 annule P= $3X^3+8X^2+3X-2$ donc X+1 divise P. Il existe donc a, b, c des réels tels que P = (X+1)(aX^2+bX+c). En identifiant les termes de plus haut degré on trouve $a=3$. En identifiant les constantes on trouve $c=-2$. En identifiant les termes de degré 1 on obtient : b+c= 3 soit b = 5 (on peut vérifier en identifiant les termes de degré 2 : b+a=8).

  Le polynôme $3X^2+5X-2$ a pour discriminant $\Delta = 49$ donc pour racines -2 et $\frac{1}{3}$.

  Conclusion : P= 3(X+1)$(X+2)(X-\frac{1}{3})$.
- -1 annule Q= $2X^3+3X+5$ donc X+1 divise P. Il existe donc a, b, c des réels tels que Q = (X+1)(aX^2+bX+c). En identifiant les termes de plus haut degré on trouve $a=2$. En identifiant les constantes on trouve $c=5$. En identifiant les termes de degré 1 on obtient : b+c= 3 soit b = -2 (on peut vérifier en identifiant les termes de degré 2 : b+a=0)

  Le polynôme $2X^2-2X+5$ a pour discriminant $\Delta = -36$ donc pas de racine réelle.

  Conclusion : Q = (X+1)($2X^2-2X+5$).

Exercice 2 :

Il suffit de vérifier que les racines de X^2+X (0 et -1) sont aussi racines de $(X+1)^{2n+1}-X^{2n+1}-1$

Exercice 3 :

On a bien $2^5-5\times 2^4+7\times 2^3-2\times 2^2+4\times 2-8=32-80+56-8+8-8=0$ ainsi 2 est racine de P de multiplicité au moins 1.

On a P' = $5X^4-20X^3+21X^2-4X+4$ et pour X=2 on a :
$5\times 2^4-20\times 2^3+21\times 2^2-4\times 2+4=80-160+84-8+4=0$ donc 2 est racine de P de multiplicité au moins 2.

On a P'' = $20X^3-60X^2+42X-4$ et pour X=2 on a :
$20\times 2^3-60\times 2^2+42\times 2-4=160-240+84-4=0$ donc 2 est racine de P de multiplicité au moins 3.

On a P''' = $60X^2-120X+42$ et pour X=2 on a : $60\times 2^2-120\times 2+42= 42\neq 0$ donc 2 racine de P de multiplicité exactement 3 ainsi $(X-2)^3$ divise P donc il existe a, b, c des réels tels que P = $(X-2)^3\ (aX^2+bX+c)$. En identifiant les termes de plus haut degré on trouve $a=1$. En identifiant les constantes on trouve : $-8c=-8$ donc $c=1$.

En identifiant les termes de degré 1 on trouve $-8b+12c=4$ donc $b=1$ (on peut vérifier en identifiant les termes de degré 4 : $b-6a\ =-5$)

Le polynôme X^2+X+1 a pour discriminant $\Delta = -3$ donc pas de racine réelle.

Conclusion : P = $(X-2)^3\ (X^2+X+1)$.

Exercice 4 :

a. Avec la formule du binôme de Newton on trouve un polynôme de degré n-1 et de monôme dominant nX^{n-1}

b. i. $Q_n=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}X^k$

ii. Comme n≥ 2, Q_n est non nul et ses coefficients sont bien entiers puisque ce sont les coefficients binomiaux que l'on retrouve dans le triangle de Pascal.

c. Avec l'expression de Q_n donnée dans l'énoncé, 0 est racine de Q_n donc X divise Q_n.

d. Avec l'expression de Q_n donnée dans l'énoncé, -1 est racine de Q_n si et seulement si $-(-1)^n-1=$ 0$\Leftrightarrow (-1)^{n+1}=1 \Leftrightarrow n+1$ est pair $\Leftrightarrow n$ est impair

e. Si $(X+1)^2$ divise Q_n alors -1 est racine double de Q_n donc n est impair d'après la question précédente et -1 est racine de $Q_n'=n(X+1)^{n-1}-nX^{n-1}$ donc $(-1)^{n-1}=0$ ce qui est IMPOSSIBLE.
$\forall n\geq 2, (X+1)^2$ ne divise pas Q_n.