

1 Calcul d'intégrales et de primitives

1 Montrer que $F : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

2 Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2(x-1)}$ définie sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 3.

3 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{-2}^4 (x^3 + x - 2) dx$$

$$2. \int_3^{11} \sqrt{2x + 3} dx$$

$$3. \int_2^4 \ln(2t) dt$$

$$4. \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$$

$$5. \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}} dt$$

$$6. \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} dt$$

$$7. \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$$

$$8. \int_{-1/3}^0 2^{3x+1} dx$$

$$9. \int_1^e \frac{(\ln t)^\alpha}{t} dt \text{ pour } \alpha > 0.$$

$$10. \int_0^2 |x^3 - x^2 + x - 1| dx$$

$$11. \int_0^5 t|t^2 - 1| dt$$

$$12. \int_0^5 \frac{t-1}{|t^2-2t|+1} dt$$

$$13. \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$14. \int_1^e \ln(t) dt$$

$$15. \int_0^1 \text{Arctan}(t) dt.$$

$$16. \int_0^1 x \text{Arctan}(x) dx.$$

$$17. \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx.$$

$$18. \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^x dx.$$

$$19. \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^3(x) dx.$$

$$20. \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx.$$

4 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_1^e t^n \ln t dt$ et $J_n = \int_1^e t^n (\ln t)^2 dt$.

5 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$2. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-1)} dt$$

$$3. \int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)} dt$$

$$4. \int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)} dt$$

$$5. \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt$$

$$6. \int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+4t-5} dt$$

6 Calculer les intégrales suivantes avec le changement de variable indiqué.

$$1. \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx \quad (u = \sqrt{e^x - 1})$$

$$2. \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \quad (x = t+1)$$

$$3. \int_1^{4/3} \frac{t^2}{(3t-2)^5} dt \quad (u = 3t-2)$$

$$4. \int_1^2 \frac{e^{2t}}{1-e^t} dt \quad (t = \ln(x))$$

$$5. \int_0^1 \frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{t}+1} dt \quad (x = \sqrt{t})$$

$$6. \int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$$

$$7. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} \quad (u = \cos(t))$$

$$8. \int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos(t)} \quad (x = \sin(t))$$

$$9. \int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)} dt \quad (u = t^3)$$

$$10. \int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt \quad (t = x^2)$$

$$11. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} dx \quad (u = \sin(x))$$

$$12. \int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx \quad (x = \sqrt{t})$$

2 Suites d'intégrales

7 On note pour $p, q \in \mathbb{N}$, $I(p, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Calculer $I(0, q)$ et $I(p, 0)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.
2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, exprimer $I(p+1, q)$ en fonction de $I(p, q+1)$.
3. Calculer $I(p, q)$ en fonction de p et q .

8 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. La suite (I_n) est-elle monotone ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$
3. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

9 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Est-elle minorée ?
2. Montrer que sur $[1, e]$, $0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$. En déduire un encadrement de I_n .
3. Montrer que : $\forall n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.

10 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \geq 1$.
En déduire la valeur de I_n pour tout $n \geq 1$.

11 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Etablir une relation entre I_n et I_{n+1} . En déduire la valeur de I_n .
2. Calculer alors $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ln(2)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire un encadrement de u_n .

3 Fonctions définies par des intégrales

13 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$

- Déterminer le domaine de définition de la fonction F et montrer que F est dérivable sur son domaine de définition. Calculer sa dérivée.
- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $F(x) \leq 0$.
- Montrer que F est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq e|x|$.
- Etudier la parité de la fonction F .

14 Pour chacune des fonctions suivantes, donner :

- le domaine de définition de f
- le signe de f sur le domaine de définition,
- la parité éventuelle
- la dérivée de f si elle existe

$$1. f : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$$

$$2. f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$$

$$3. f : x \mapsto \int_0^x |t| dt$$

$$4. f : x \mapsto \int_1^x |t|^3 dt$$

$$5. f : x \mapsto \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4 + 1} dt$$

$$6. f : x \mapsto \int_x^0 \sqrt{1 + t^2} dt$$

$$7. f : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1 - t^4}$$

$$8. f : x \mapsto \int_1^x e^{-t^2} dt$$

$$9. f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

15 Soit $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- En remarquant que $\ln(2) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ pour tout réel $x > 0$, montrer que f admet $\ln(2)$ pour limite en 0.
- Montrer que f peut se prolonger en une fonction \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.
- Étudier les variations de f . Étudier le signe de $f(x)$ sur le domaine de définition de f .
- Tracer l'allure de la courbe de f .

16 On pose $g(x) = (2x - 1) \int_{1/2}^x \frac{t^4 dt}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$.

- Déterminer le domaine de définition de la fonction g .
- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.
- Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

17 Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- f est-elle paire ? impaire ?
- Démontrer que pour $x \neq 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$.
- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.