

1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$.
 Montrer que f réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

La fonction \ln est continue et dérivable sur $[\sqrt{e}, +\infty[$, à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue et dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Donc par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$ est continue et dérivable sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto x$ étant également continue et dérivable sur $[\sqrt{e}, +\infty[$ et ne s'annulant pas, on en déduit que par quotient f est bien continue et dérivable sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.

$$\forall x \geq \sqrt{e}, f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = \sqrt{\ln(x)} = \sqrt{w(x)}$ et $u'(x) = \frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$. Donc

$$\forall x > \sqrt{e}, f'(x) = \frac{1}{2x^2\sqrt{\ln(x)}} - \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^2} = \frac{1 - 2\ln(x)}{2x^2\sqrt{\ln(x)}} < 0$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.

Continue et strictement décroissante, f réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ dans $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(\sqrt{e}) \right]$.

$$\text{On a } f(\sqrt{e}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

On a $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} = \frac{(\ln(x))^{1/2}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

On a donc f qui réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ dans $]0, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$.

2 Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Montrer que si f est paire, alors sa dérivée est impaire.

Montrer que si f est impaire, alors sa dérivée est paire.

1. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et paire. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$$

La fonction f et la fonction $x \mapsto -x$ étant dérivables sur \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto f(-x)$ est également dérivable. On a donc en dérivant la relation précédente (dérivée d'une composée dans le membre de gauche),

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = f'(x)$$

La fonction f' est donc une fonction impaire.

2. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et impaire. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$$

Les fonctions $x \mapsto f(-x)$ et $x \mapsto -f(x)$ sont bien dérivables sur \mathbb{R} par composition. De plus en dérivant la relation précédente (dérivée d'une composée à gauche), on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = -f'(x) \implies f'(-x) = f'(x)$$

La fonction f' est donc une fonction paire.

3 Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1.$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$

2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$

5. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 2 \sin(x) + \tan(x) \geq 3x$

1. On note pour tout $x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^x - x - 1.$

La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x - 1.$

On en déduit que φ est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[.$

Or, $\varphi(0) = 0,$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq 0.$

2. On note pour tout $x \in]-1, +\infty[, f(x) = \ln(1+x) - x.$

La fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et $\forall x > -1, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$

On en déduit que f est croissante sur $] -1, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[.$

Or, $f(0) = 0,$ donc : $\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) \leq 0,$ donc : $\boxed{\ln(1+x) \leq x}.$

Remarquons alors qu'en particulier :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ln\left(1 - \frac{x}{x+1}\right) \leq -\frac{x}{x+1} \implies \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) \leq -\frac{x}{x+1} \implies \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$$

3. Remarquons que l'inégalité est triviale si $|x| \geq 1.$ Montrons donc qu'elle est vraie sur $[-1, 1].$ Posons pour tout $x \in [-1, 1], g(x) = |\sin(x)| - |x|$ et remarquons que g est paire, donc étudions g uniquement sur $[0, 1].$

On a $\forall x \in [0, 1], g(x) = \sin(x) - x.$ La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ et on a $\forall x \in [0, 1]:$

$$g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur $[0, 1].$ Or, $g(0) = 0,$ donc g est négative sur $[0, 1].$

On a donc $\forall x \in [0, 1], \sin(x) \leq x,$ soit $|\sin(x)| \leq |x|$ et par parité c'est vrai aussi sur $[-1, 0].$ Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$$

(et en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \sin(x) \leq x$)

4. Notons pour tout $x \in \mathbb{R}, h(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}.$ La fonction h est paire, étudions-la uniquement sur $\mathbb{R}^+.$

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}^+ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, h'(x) = -\sin(x) + x.$ Or, on a démontré (question précédente) que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \sin(x) \leq x.$ Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+, h'(x) \geq 0.$ La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+,$ avec $h(0) = 0,$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0.$

Par parité, c'est aussi vrai sur $\mathbb{R}^-,$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

5. Notons pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi(x) = 2 \sin(x) + \tan(x) - 3x.$ La fonction φ est dérivable sur $[0, \pi/2[$ et :

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \varphi'(x) = 2 \cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} - 3 = \frac{2 \cos^3(x) - 3 \cos^2(x) + 1}{\cos^2(x)} = \frac{(\cos(x) - 1)^2 (2 \cos(x) + 1)}{\cos^2(x)} \geq 0$$

Ainsi, φ est croissante sur $[0, \pi/2[,$ avec $\varphi(0) = 0,$ donc : $\forall x \in [0, \pi/2[, \varphi(x) \geq 0.$

4 Montrer que pour $u > 0$ et $v \in \mathbb{R} : uv \leq u \ln(u) + e^{v-1}$.

Fixons $u > 0$ quelconque.

Et notons alors pour tout $v \in \mathbb{R} : \forall v \in \mathbb{R}, f(v) = uv - u \ln(u) - e^{v-1}$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et on a $\forall v \in \mathbb{R}, f'(v) = u - e^{v-1}$.

$$u - e^{v-1} \geq 0 \iff e^{v-1} \leq u \iff v \leq \ln(u) + 1$$

Ainsi, f est croissante sur $] -\infty, \ln(u) + 1]$ et décroissante sur $[\ln(u) + 1, +\infty[$, elle admet donc un maximum en $\ln(u) + 1$. Or :

$$f(\ln(u) + 1) = u(\ln(u) + 1) - u \ln(u) - e^{\ln(u)+1-1} = u \ln(u) + u - u \ln(u) - u = 0$$

Ainsi, on a bien que : $\forall v \in \mathbb{R}, f(v) \leq 0$, autrement dit :

$$\forall v \in \mathbb{R}, uv \leq u \ln(u) + e^{v-1}$$

Ceci étant vrai pour tout $u > 0$, on a donc bien montré que :

$$\forall u > 0, \forall v \in \mathbb{R}, uv \leq u \ln(u) + e^{v-1}$$

5 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Notons pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* (comme somme de composées de fonctions dérivables), et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ainsi, la fonction f est constante sur chacun des intervalles sur lequel elle est dérivable.

De plus, $f(1) = 2\text{Arctan}(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\pi}{2}$$

et $f(-1) = 2\text{Arctan}(-1) = -\pi/2$, donc :

$$\forall x < 0, f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

6 Montrer que la fonction $f : x \mapsto 2\text{Arctan}(\sqrt{x^2+1}-x) + \text{Arctan}(x)$ est constante sur \mathbb{R} et déterminer sa valeur.

La fonction f est bien définie sur \mathbb{R} , et est dérivable par somme de composées de fonctions dérivables. On a :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= 2 \times \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{1 + (\sqrt{x^2+1}-x)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\
 &= 2 \times \frac{\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{1 + (x^2+1) - 2x\sqrt{x^2+1} + x^2} + \frac{1}{1+x^2} \\
 &= \frac{2(x - \sqrt{x^2+1})}{2\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-x))} + \frac{1}{1+x^2} \\
 &= \frac{-1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, f est constante sur chaque intervalle où elle est dérivable, donc constante sur \mathbb{R} . En particulier, $f(0) = 2\text{Arctan}(1) = 2 \times \pi/4 = \pi/2$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\text{Arctan}(\sqrt{x^2+1}-x) + \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

7 Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

- Sur \mathbb{R}^* .

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et est à valeurs dans \mathbb{R} .

La fonction $t \mapsto e^t$ est dérivable sur \mathbb{R} , donc par composition, f est dérivable sur \mathbb{R}^* .

On a alors

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{-1/x^2} = e^{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = -\frac{1}{x^2}$$

On a donc

$$\forall x \neq 0, f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \boxed{\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}}$$

- En 0. On remarque que f est bien continue en 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \frac{1}{x}e^{-(\frac{1}{x})^2}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, et $\lim_{u \rightarrow +\infty} ue^{-u^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{u^2}}{e^{u^2}} = 0$ par croissances comparées, donc par composition de limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, et $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^{-u^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} -\frac{\sqrt{u^2}}{e^{u^2}} = 0$ par croissances comparées, donc par composition de limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Au final, on a montré que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, donc la fonction f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

On a donc au final, f dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2 + 3 \ln(x)}{1 - \ln(x)}$.

- Démontrer que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- Déterminer $f^{-1}(-4)$. Justifier que f^{-1} est dérivable en -4 et calculer $(f^{-1})'(-4)$.

1. La fonction f est dérivable donc continue sur $]e, +\infty[$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $]e, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant jamais sur $]e, +\infty[$). On a

$$\forall x \in]e, +\infty[, f'(x) = \frac{\frac{3}{x}(1 - \ln(x)) - (2 + 3 \ln(x)) \frac{-1}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{5}{x(1 - \ln(x))^2} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]e, +\infty[$.

- La fonction f est continue sur $]e, +\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $]e, +\infty[$.

Donc, f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ dans $f(]e, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow e^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$.

$$f(x) = \frac{2 + 3 \ln(x)}{1 - \ln(x)} \underset{x \rightarrow e}{\sim} \frac{5}{1 - \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow e^+} -\infty$$

$$f(x) = \frac{2 + 3 \ln(x)}{1 - \ln(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3 \ln(x)}{-\ln(x)} = -3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -3$$

En conclusion, f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ dans $] -\infty, -3[$.

2. On cherche $\alpha = f^{-1}(-4)$, autrement dit, on cherche $\alpha \in]e, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = -4$.

$$f(\alpha) = -4 \iff \frac{2 + 3 \ln(\alpha)}{1 - \ln(\alpha)} = -4 \iff 2 + 3 \ln(\alpha) = -4 + 4 \ln(\alpha) \iff \ln(\alpha) = 6 \iff \alpha = e^6$$

On a donc

$$f(e^6) = -4 \iff f^{-1}(-4) = e^6$$

On sait que pour tout $x \in]e, +\infty[$,

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } f(x) \iff f'(x) \neq 0$$

Donc pour savoir si f^{-1} est dérivable en $-4 = f(e^6)$, il suffit de vérifier que $f'(e^6) \neq 0$.

$$f'(e^6) = \frac{5}{e^6(1 - \ln(e^6))^2} = \frac{5}{e^6 25} = \frac{1}{5e^6} \neq 0$$

La fonction f^{-1} est donc bien dérivable en -4 et

$$(f^{-1})'(-4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-4))} = \frac{1}{f'(e^6)} = 5e^6$$

9 Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par : $f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ vers un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer $f^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right)$. Justifier que f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $(f^{-1})' \left(-\frac{1}{2} \right)$.

1. Remarquons que pour tout $x \in]0, 1[$, $\left| \frac{x-1}{x} \right| = \frac{1-x}{x}$, donc :

$$\forall x \in]0, 1[, f(x) = \ln(1-x) - \ln(x) - x$$

La fonction f est dérivable donc continue sur $]0, 1[$ (somme de composées de fonctions dérivables), et on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{x} - 1 = \frac{-x - (1-x) - x(1-x)}{(1-x)x} = \frac{-1-x+x^2}{(1-x)x} < 0$$

En effet, $x^2 - x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 5$, donc a deux racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, donc pour tout $x \in [0, 1]$, $x^2 - x - 1 < 0$ (car 0 et 1 sont entre les deux racines).

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $]0, 1[$, elle réalise donc une bijection de $]0, 1[$ vers $f(]0, 1[) = \left] \lim_1 f, \lim_0 f \right[=] -\infty, +\infty[$.

2. :

$$f(x) = -\frac{1}{2} \iff \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) - x = -\frac{1}{2} \iff \ln \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = x - \frac{1}{2}$$

Remarquons que $x = 1/2$ convient ! on a $f \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$, donc

$$f^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Comme on a montré que f est dérivable en tout réel x de $]0, 1[$, avec $\forall t \in]0, 1[, f'(t) \neq 0$, alors f^{-1} est bien dérivable sur $J = \mathbb{R}$ et on a en particulier :

$$(f^{-1})' \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{f' \left(\frac{1}{2} \right)} = \frac{(1 - \frac{1}{2}) \frac{1}{2}}{-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{5}$$

10 La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$ est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* comme quotient de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (le dénominateur ne s'annulant pas), et est même continue en 0 puisque c'est un quotient de fonctions continues en 0, le dénominateur ne s'annulant pas au voisinage de 0.

On a :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad \forall x < 0, f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1 + |x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Finalement, f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^2}$$

La fonction f' étant continue sur \mathbb{R} , la fonction f est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

11 En reconnaissant des taux d'accroissements, déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln(x)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{2x}$$

1. Notons $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$. Alors $f(0) = 1$, et la fonction f est dérivable en 0. On a donc :

$$\frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0)$$

Or, pour tout x au voisinage de 0, $f'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}$, donc $f'(0) = 0$, et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{x} = 0$$

2. Remarquons que : $\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, donc par passage à l'inverse :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln(x)} = 1$$

3. Remarquons que : $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

4. Notons $g(x) = \ln(\cos(x))$. Alors g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$.

$$\text{Donc : } \frac{\ln(\cos(x))}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} g'(0).$$

Or, pour x au voisinage de 0, $g'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$, donc $g'(0) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x} = 0$$

5. Notons $h(x) = e^{-x}$. On a $h(0) = 1$, et $\frac{e^{-x} - 1}{x} = \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} h'(0)$.

Or, pour tout x , $h'(x) = -e^{-x}$ et donc $h'(0) = -1$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$$

6. Remarquons que : $\frac{\text{Arctan}(x)}{2x} = \frac{1}{2} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \text{Arctan}'(0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + 0^2} = \frac{1}{2} \times 1 :$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

12

Calculer les limites des expressions suivantes aux valeurs indiquées.

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0 | 7. $\frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})}$ en 1^+ | 13. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2/2}$ en $+\infty$ et $-\infty$ |
| 2. $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en 0 | 8. $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$ | 14. $\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{x/2}$ en $+\infty$ |
| 3. $\frac{\ln(x-1)}{x-2}$ en 2 | 9. $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{e^x - 1}$ en 0 | 15. $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)}$ en 1^+ et $+\infty$ |
| 4. $\frac{\ln(2+x) - \ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x}) - e}$ en 0 | 10. $\frac{\ln(2-x^2)}{x-1}$ en 1 | 16. $\frac{\ln(x+1)}{e^x - \sqrt{1+x}}$ en 0 |
| 5. $\frac{x-1}{x^n - 1}$ en 1 ($n \in \mathbb{N}^*$) | 11. $(1+x^2)^{\ln(x)/x}$ en 0^+ | |
| 6. $\frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x}$ en 0 et $+\infty$ | 12. $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ en $+\infty$ | |

Avec les taux d'accroissements, on peut en déduire des limites particulières et surtout des équivalents simples :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \boxed{\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$$

$$\boxed{\ln(u) \underset{u \rightarrow 1}{\sim} u - 1}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \boxed{e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \alpha \quad \boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x}$$

1. $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, on peut dire que $\ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$, donc $\frac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x} = \boxed{x}$.

On en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0}$.

2. $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en 0

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1-x} = 1$. Or, on sait que $\ln(u) \underset{u \rightarrow 1}{\sim} u - 1$, donc on peut dire que

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1+x}{1-x} - 1 = \frac{(1+x) - (1-x)}{1-x} = \frac{2x}{1-x}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \frac{2x}{1-x} = \frac{2}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{2}$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2}$.

Remarque : on peut aussi écrire $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1-x+2x}{1-x}\right) = \ln\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)$ et après utiliser l'équivalent $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$ pour avoir l'équivalent : $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{1-x}$.

3. $\frac{\ln(x-1)}{x-2}$ en 2

Puisque $x-1 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 1$, on sait que $\ln(x-1) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} (x-1) - 1$, donc

$$\frac{\ln(x-1)}{x-2} \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \frac{(x-1) - 1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} = \boxed{1}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = 1$.

4. $\frac{\ln(2+x) - \ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x}) - e}$ en 0

Regardons séparément le numérateur et le dénominateur.

$$\begin{aligned} \ln(2+x) - \ln(2) &= \ln\left(2\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right) - \ln(2) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln(2) \\ &= \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2} \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \exp(\sqrt{1+x}) - e &= e\left(e^{\sqrt{1+x}-1} - 1\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} e\left(\sqrt{1+x} - 1\right) \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - 1) = 0) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} e \frac{1}{2} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{ex}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, par quotient, on obtient :

$$\frac{\ln(2+x) - \ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x}) - e} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{ex}{2}} = \frac{x}{2} \times \frac{2}{ex} = \boxed{\frac{1}{e}}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x}) - e} = \frac{1}{e}$.

5. $\frac{x-1}{x^n - 1}$ en 1 ($n \in \mathbb{N}^*$)

Soit $n \geq 1$. Posons $x = 1 + h$ avec $h \in \mathbb{R}$. Alors, on a $x \rightarrow 1 \iff h \rightarrow 0$.

$$\frac{x-1}{x^n - 1} = \frac{(1+h) - 1}{(1+h)^n - 1} = \frac{h}{(1+h)^n - 1} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h}{nh} = \boxed{\frac{1}{n}}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}$.

Remarque : rappelons-nous que

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1)$$

donc on peut aussi calculer la limite directement :

$$\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{n}$$

On peut aussi utiliser l'inverse d'un taux d'accroissement en 1.

6. $\frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x}$ en 0

Pour le numérateur, on reconnaît une forme $\ln(1+u)$ avec $u \rightarrow 0$, donc on peut appliquer $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$:

$$\frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{4x^2 - 2x}{x} = 4x - 2$$

On en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x} = -2$.

$\frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x}$ en $+\infty$

On a $4x^2 - 2x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 4x^2$ (polynôme). Et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2) = +\infty \neq 1$, on peut bien composer par le logarithme.

$$\frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(4x^2)}{x} = \frac{\ln(4) + 2\ln(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\ln(x)}{x}$$

On en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x} = 0$

7. $\frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})}$ en 1^+

$$\begin{aligned} \frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})} &= \frac{e^{x \ln(x)} - 1}{\ln(1 + (-\sqrt{x^2 - 1}))} \\ &\underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{x \ln(x)}{-\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{car } e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \text{ et } \ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \\ &\underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{-\ln(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &\underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{-(x-1)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} \\ &\underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{-(x-1)}{\sqrt{2(x-1)}} \\ &\underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})} = 0$.

8.

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$$

9.

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1} = \frac{1}{2}}$$

10.

$$\frac{\ln(2-x^2)}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{(2-x^2)-1}{x-1} = \frac{1-x^2}{x-1} = \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} = -1-x \xrightarrow{x \rightarrow 1} -2$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x^2)}{x-1} = -2}$$

11.

$$(1+x^2)^{\ln(x)/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x} \ln(1+x^2)\right)$$

Regardons ce qui est dans l'exponentielle

$$\frac{\ln(x)}{x} \ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\ln(x)}{x} \times x^2 = x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Donc, par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x} \ln(1+x^2)\right) = e^0 = 1}$$

12.

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

Regardons ce qui est dans l'exponentielle

$$x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right) = x \left(\frac{x+1-(x-1)}{x-1}\right) = x \left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{2x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$$

Donc, par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = e^2}$$

13.

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2/2} = \exp\left(\frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

Regardons ce qui est dans l'exponentielle

$$\frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{x}{2} \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \end{cases}$$

Donc, par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = +\infty}$$

et

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = 0}$$

14.

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x/2} = \exp\left(\frac{x}{2} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right)$$

Regardons ce qui est dans l'exponentielle

$$\frac{x}{2} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} - 1\right) = \frac{x}{2} \left(\frac{x^2-1-(x^2+1)}{x^2+1}\right) = \frac{x}{2} \frac{-2}{(x^2+1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{x}{2} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right) = e^0 = 1}$$

15.

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)} = \exp\left(x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\right)$$

En $+\infty$.

Regardons ce qui est dans l'exponentielle.

On sait que $\ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$, donc $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

$$\begin{aligned} x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right) &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln(x) \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1\right) \\ &= x \ln(x) \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\ln(x)} \\ &= x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \frac{1}{x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

Donc par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\right) = e^1 = e}$$

En 1^+ .

Regardons ce qui est dans l'exponentielle.

$$x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \ln(x) (\ln(\ln(x+1)) - \ln(\ln(x))) = \ln(x) \ln(\ln(x+1)) - \ln(x) \ln(\ln(x))$$

Or $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \ln(\ln(x+1)) = 0$ (car du type $0 \times \ln(2)$).

De plus, $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \ln(\ln(x)) = 0$ (car du type $u \ln(u)$ avec $u \rightarrow 0$).

Ainsi

$$x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$$

Donc par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \exp\left(x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\right) = e^0 = 1}$$

16. Le numérateur est $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Le dénominateur est

$$e^x - \sqrt{1+x} = (e^x - 1) - (\sqrt{1+x} - 1)$$

On sait que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et d'autre part $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$,

Puisque les deux expressions sont du même ordre de grandeur (toutes deux du type αx et βx) avec $\alpha + \beta \neq 0$, on est dans le cas où on peut sommer les équivalents :

$$e^x - \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

Ainsi, par quotient,

$$\frac{\ln(x+1)}{e^x - \sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\frac{1}{2}x} = 2$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x - \sqrt{1+x}} = 2}$$

ATTENTION : dans le cas général, on n'a pas le droit de sommer les équivalents. Si vous n'êtes pas sûr de votre coup, redémontrer au lieu de sommer :

On a $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$,

Si on a l'intuition que la différence des deux devrait être $\frac{1}{2}x$, montrons-le correctement.

$$\frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\frac{1}{2}x} = 2 \frac{(e^x - 1) - (\sqrt{1+x} - 1)}{x} = 2 \frac{(e^x - 1)}{x} - 2 \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

Or, $2 \frac{(e^x - 1)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2$.

Et, $2 \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2 \cdot \frac{1}{2}x}{x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$.

Donc par sommation des limites (ce qu'on a toujours le droit de faire), on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\frac{1}{2}x} = 2 - 1 = 1$$

Donc on a bien $e^x - \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$.

13 Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{y} \ln \left(\frac{x+y}{x} \right) \leq \frac{1}{x}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $x < y$. La fonction \ln est continue sur $[x, x+y]$ et dérivable sur $]x, x+y[$. On aimerait appliquer l'IAF à \ln sur $]x, x+y[$. Essayons de borner la dérivée de \ln .

$$\forall t \in]x, x+y[, \ln'(t) = \frac{1}{t}$$

La fonction \ln' est décroissante sur $]x, x+y[$. Ainsi

$$\forall t \in]x, x+y[, \frac{1}{x+y} \leq \ln'(t) \leq \frac{1}{x}$$

Donc l'IAF nous donne directement que

$$\frac{y}{x+y} \leq \ln(x+y) - \ln(x) \leq \frac{y}{x}$$

soit

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{y} \ln \left(\frac{x+y}{x} \right) \leq \frac{1}{x}$$

Remarque: on peut aussi appliquer le résultat obtenu dans la question 2 de l'exercice 3 à $\frac{y}{x}$.

14 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|1 - \cos(x)| \leq |x|$.

La fonction \cos est continue et dérivable sur \mathbb{R} , et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\cos'(t)| = |-\sin(t)| = |\sin(t)| \leq 1$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\cos(y) - \cos(x)| \leq 1 \times |x - y|$$

En particulier, pour $y = 0$, puisque $\cos(0) = 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |1 - \cos(x)| \leq |x|$$

15 Montrer que pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a : $|\tan(x)| \geq |x|$.

La fonction \tan est continue et dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Soit $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ fixé.

En appliquant le théorème des accroissements finis entre 0 et x , on a :

$$\exists c \in]0, x[\quad (\text{ou }]x, 0[) \quad / \quad \tan(x) - \tan(0) = \tan'(c)(x - 0)$$

autrement dit :

$$\exists c \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad / \quad \tan(x) = (1 + \tan^2(c))x$$

Donc :

$$|\tan(x)| = (1 + \tan^2(c))|x| \geq |x|$$

16 Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Montrer que h est de classe \mathcal{C}^1 sur son domaine de définition.
2. Démontrer que h admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$
3. Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

1. La fonction $x \mapsto 1 + e^{-x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et à valeurs dans $]1, +\infty[$. La fonction $u \mapsto \ln(u)$ est bien de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$. Par composition, on en déduit donc que h est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}
2. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = x$, i.e. tel que $h(x) - x = 0$.
Posons $f : x \mapsto h(x) - x$. f est donc dérivable sur \mathbb{R} par somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = h'(x) - 1 = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} - 1 = \frac{-e^{-x} - (1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} = \frac{-1 - 2e^{-x}}{1 + e^{-x}} < 0$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur \mathbb{R} . De plus, f est continue sur \mathbb{R} par somme de fonctions continues sur \mathbb{R} , donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de \mathbb{R} dans $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$.

Puisque $0 \in]-\infty, +\infty[$, on sait donc que 0 admet un unique antécédent par f dans \mathbb{R} , qu'on peut noter α .

On a donc montré qu'il existait un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(\alpha) = 0$, i.e. $h(\alpha) = \alpha$.

De plus, on a $f(0) = \ln(2) > 0$ et $f(1) = \ln(1 + \frac{1}{e}) - 1 < 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$. Par unicité de α , on en déduit que $\alpha \in [0, 1]$.

3. L'inégalité fait penser à l'Inégalité des Accroissements Finis. Essayons de l'appliquer.

La fonction h est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\frac{1}{e^x + 1}$. Essayons de trouver des bornes pour la fonction h' .

La fonction h' est encore dérivable sur $[0, +\infty[$ (inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas), et on a :

$$\forall x \geq 0, \quad h''(x) = -\frac{-e^{-x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{-x}}{(e^x + 1)^2} > 0$$

La fonction h' est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Puisque $h'(0) = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = 0$, on a donc $\forall x \in [0, +\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leq h'(x) \leq 0$, ou autrement dit

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

On a donc :

- h continue et dérivable sur $[0, +\infty[$
- $\forall t \geq 0, |h'(t)| \leq \frac{1}{2}$

Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in [0, +\infty[$, on a :

$$|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

En particulier, pour $y = \alpha \in [0, 1]$, qui vérifie $h(\alpha) = \alpha$, on a :

$$|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

17

1. Montrer que l'équation $e^x = 3 + 2x$, d'inconnue $x \in]-\infty, 0]$ admet une unique solution α dans $] -\infty, 0]$, puis justifier que $-2 \leq \alpha \leq -1$.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, \left| \frac{e^x - 3}{2} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

1. Notons pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f(x) = e^x - 3 - 2x$.

La fonction f est continue et dérivable sur $] -\infty, 0]$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 2 < 0$.

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$, elle réalise alors une bijection de $] -\infty, 0]$ vers $[f(0), \lim_{-\infty} f[= [-2, +\infty[$. Comme $0 \in [-2, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -\infty, 0]$.

Remarquons que $f(-2) = e^{-2} - 3 + 4 = e^{-2} + 1 > 0$ et $f(-1) = e^{-1} - 3 + 2 = e^{-1} - 1 < 0$. On a donc :

$$f(-2) > f(\alpha) > f(-1)$$

donc par stricte décroissance de f sur $] -\infty, 0]$ (avec $-1 \in] -\infty, 0]$, $-2 \in] -\infty, 0]$, $\alpha \in] -\infty, 0]$),

$$-2 < \alpha < -1$$

2. Notons pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $g(x) = \frac{e^x - 3}{2}$.

La fonction g est continue et dérivable sur $] -\infty, 0]$ et :

$$\forall t \in]-\infty, 0], |g'(t)| = \left| \frac{1}{2} e^t \right| \leq \frac{1}{2}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in]-\infty, 0], |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

En particulier, pour $y = \alpha$, qui vérifie $e^\alpha = 3 + 2\alpha \iff \frac{e^\alpha - 3}{2} = \alpha \iff g(\alpha) = \alpha$, on a :

$$\forall x \in]-\infty, 0], |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

18 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f'(a) = 0$, que $f(b) > 0$ et que $f'(b) < 0$.

Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

La fonction f est continue (car dérivable) sur le segment $[a, b]$, donc est bornée et atteint ses bornes sur le segment $[a, b]$. En particulier, elle admet un maximum en un réel $c \in [a, b]$:

$$\exists c \in [a, b] / \forall t \in [a, b], f(t) \leq f(c)$$

Déjà on ne peut pas avoir $c = a$, puisque $f(a) < f(b)$.

De plus, puisque $f'(b) < 0$, $f(b)$ ne peut pas être un maximum, car si f admet un maximum en b , on a nécessairement $f'_g(b) \geq 0$.

Ainsi, le maximum de f est atteint en $c \in]a, b[$, on sait alors que $f'(c) = 0$.

19 Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Si f est constante, alors il existe bien $c \in]a, +\infty[$ (n'importe lequel) tel que $f'(c) = 0$.

Sinon, il existe $b \in]a, +\infty[$ tel que $f(a) \neq f(b)$.

Posons $y = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ qui est une valeur intermédiaire à $f(a)$ et $f(b)$: par TVI il existe $x_1 \in [a, b[$ tel que $y = f(x_1)$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$, y est aussi une valeur intermédiaire à $f(b)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, donc par TVI, il existe $x_2 \in]b, +\infty[$ tel que $y = f(x_2)$.

On applique le Théorème de Rolle à f sur $[x_1, x_2]$ (car continue et dérivable sur $[x_1, x_2]$ et $f(x_1) = f(x_2)$), donc il existe bien $c \in]x_1, x_2[\subset]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

20 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $e^{-a}f(a) = e^{-b}f(b)$.
Montrer qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $e^{-a}f(a) = e^{-b}f(b)$.

Posons pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi(x) = e^{-x}f(x)$.

Par produit, la fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

De plus, on sait que $\varphi(a) = \varphi(b)$ par hypothèse.

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or, pour tout $x \in]a, b[$, $\varphi'(x) = (-e^{-x})f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$.

Comme $\varphi'(c) = 0$, on a donc $f'(c) - f(c) = 0$, donc $f(c) = f'(c)$.

21 Soit f une fonction définie et deux-fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et telle que :

$$\forall x \geq 0, \quad f''(x) - f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$.

Indication : on pourra commencer par étudier $g : x \mapsto e^x(f'(x) - f(x))$.

Notons comme l'indication le suggère :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g(x) = e^x(f'(x) - f(x))$$

La fonction g est dérivable car f et f' le sont, et :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'(x) = e^x(f'(x) - f(x)) + e^x(f''(x) - f'(x)) = e^x(f''(x) - f(x)) \geq 0$$

Ainsi, g est croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $g(0) = 0$, la fonction g est donc positive, et en particulier, on a :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad f'(x) - f(x) \geq 0}$$

Suivant la même méthode, posons à présent :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad h(x) = e^{-x}f(x)$$

La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad h'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) \geq 0$$

La fonction h est donc croissante sur $[0, +\infty[$, et comme $h(0) = 0$, la fonction h est donc positive, et en particulier, on a :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq 0}$$