

1

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} \right)$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x-1}} \right)$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1} \right)$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-2}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left( \frac{1}{x} \right)$ .
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ .
12.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{|x+2|}$ .
13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \cos(x))$ .
14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \text{Arctan}(x) + \text{Arctan} \left( \frac{1}{x} \right) \right)$ .

1. Au voisinage de  $1^+$ ,  $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \boxed{+\infty}$ .

2. Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{0}$ .

3. Au voisinage de  $\pm\infty$ ,  $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \boxed{1}$ .

4. Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{1}$ .

5. Au voisinage de  $-\infty$ ,  $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{-1}$ .

6. Au voisinage de 0, on a  $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ .

- Sans problème, à gauche de 0 :  $\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \boxed{-\infty}$ .

- Au voisinage de 0 à droite, on a en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} = \frac{\frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right)}{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}} = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}} = \frac{-1-x}{1 + \sqrt{1+x+x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \boxed{-\frac{1}{2}}$$

7. Au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned} x \left( \sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x-1}} \right) &= x \frac{(x + \sqrt{x+1}) - (x + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{x + \sqrt{x-1}}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{x + \sqrt{x-1}}} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x + \sqrt{x+1}} + \sqrt{x + \sqrt{x-1}}} \times \frac{(x+1) - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

8. Au voisinage de 1, on a :

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 - x + 1)}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} \boxed{\frac{1}{2}}$$

9. Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x - 2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \boxed{1}$ .

10. Au voisinage de 0,  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$  est borné, donc  $x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \boxed{0}$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \sin\left(\frac{1}{X}\right) = \boxed{0}$  d'après la question précédente.

12. Au voisinage de  $-2$ ,  $\frac{x}{|x+2|} \underset{x \rightarrow -2}{\rightarrow} \boxed{-\infty}$ .

13. Au voisinage de  $+\infty$ ,  $x - 2 \cos(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \boxed{+\infty}$ .

14. Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2} + 0 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ .

**2** Déterminer les limites suivantes :

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}}$ .                                   | 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-e^x}$ .     | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\ln(x)}$ .                              |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$ . | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x} \ln(x)$ .        | 9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .        |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$ .       | 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(x^2 + x)$ . | 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)^{1/x}$ . |
|  | 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{1/x}$ .      |   |

1.  $x^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x} \ln(x))$ .

Or, par croissances comparées,  $\sqrt{x} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

$$x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0 = \boxed{1}$$

2.  $\frac{x^2}{1+x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{x} = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , on en déduit donc que :

$$\sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{0}$$

3.  $\sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = \sqrt{x}(\ln(x^2) - \ln(1+x)) = 2\sqrt{x} \ln(x) - \sqrt{x} \ln(1+x)$ .

Par croissances comparées,  $\sqrt{x} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Donc :

$$2\sqrt{x} \ln(x) - \sqrt{x} \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 - 0 = \boxed{0}$$

4.  $x^2 e^{-e^x} = \frac{x^2}{e^{e^x}} = \frac{x^2}{e^x} \times \frac{e^x}{e^{e^x}}$ .

Par croissances comparées  $\frac{x^2}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Et par croissances comparées  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{e^x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ .

Donc :

$$\frac{x^2}{e^x} \times \frac{e^x}{e^{e^x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{0}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(X)}{e^X} = \boxed{0}$$

car  $\ln(X) = \underset{X \rightarrow +\infty}{o}\left(e^X\right)$  par croissances comparées.

6.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(x^2 + x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} \ln(X^2 - X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X^2 - X)}{e^X}$$

Or,  $X^2 - X \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} X^2 \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc  $\ln(X^2 - X) \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(X^2) = 2 \ln(X)$ . Ainsi :

$$\frac{\ln(X^2 - X)}{e^X} \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(X)}{e^X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \boxed{0}$$

7.

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$$

Or,

$$\frac{\ln(x+1)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc :

$$\exp\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = \boxed{1}$$

8.

$$x^{\ln(x)} = \exp(\ln(x) \ln(x)) = \exp(\ln^2(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{+\infty}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} (1+X)^{1/X} = \boxed{1} \text{ d'après la question 7.}$$

10.

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(e^x) - \ln(x)}{x}\right) = \exp\left(\frac{x - \ln(x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Or, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ , donc :

$$\exp\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{e^1}$$

**3** Étudier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

1.  $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

4.  $x \mapsto \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$

7.  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2.  $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ .

5.  $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$

8.  $x \mapsto x^x$ .

3.  $x \mapsto \frac{|x|}{x}$

6.  $x \mapsto x \left| x + \frac{1}{x} \right|$

9.  $x \mapsto x^2 \exp\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$

Les fonctions sont prolongeables par continuité en 0 si et seulement si elles admettent une limite finie en 0.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  (produit d'une fonction tendant vers 0 par une fonction bornée).

Ainsi,  $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$ , donc  $x \mapsto e^{1/x}$  n'est pas prolongeable par continuité en 0 (on n'a pas les mêmes limites à droite et à gauche, ou alors tout simplement une des limites est infinie).

3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ , et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ .

Donc  $x \mapsto \frac{|x|}{x}$  n'est pas prolongeable par continuité en 0 (limites différentes à droite et à gauche).

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1}{x - 1} = -1$ .

et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{x + 1} = -1$

Donc  $f : x \mapsto \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = -1$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$  est la moitié de la limite du taux d'accroissement en 0 de la fonction  $f$  qui à  $x$  associe  $\sqrt{1+x}$ . C'est donc  $f'(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{4}$ .

6. En  $0^+$ ,  $x \left| x + \frac{1}{x} \right| = x \left( x + \frac{1}{x} \right) = x^2 + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ .

Et en  $0^-$ ,  $x \left| x + \frac{1}{x} \right| = x \left( -x - \frac{1}{x} \right) = -x^2 - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -1$ .

Donc la fonction  $x \mapsto x \left| x + \frac{1}{x} \right|$  n'est pas prolongeable par continuité en 0.

7. En  $0^+$  (et en  $0^-$ ),  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  n'admet pas de limite, donc ne peut pas être prolongeable par continuité en 0.

8.  $x^x = e^{x \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0 = 1$  (par croissances comparées), donc  $f : x \mapsto x^x$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \exp\left(\frac{\cos(x)}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{X \cos(1/X)}}{X^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{X \cos(1/X)}}{(X \cos(1/X))^2} = +\infty$  par croissances comparées, donc nécessairement la fonction ne peut pas être prolongeable par continuité en 0.

4 Étudier la définition, la continuité, et le prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto (1+x)\ln(1+x)$

2.  $x \mapsto \frac{1}{1+e^{1/x}}$

3.  $x \mapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4.  $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

1. La fonction  $f : x \mapsto (1+x)\ln(1+x)$  est définie sur  $] -1, +\infty[$ . Elle est continue sur  $] -1, +\infty[$  en tant que produit de composées de fonctions continues.

De plus, en  $-1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} (1+x)\ln(1+x) = \lim_{u \rightarrow 0} u \ln(u) = 0$  (par croissances comparées), donc  $f$  est même prolongeable par continuité en  $-1$  en posant  $f(-1) = 0$ .

2. La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^{1/x}}$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Elle est continue sur  $\mathbb{R}^*$  car la fonction  $x \mapsto 1+e^{1/x}$  est continue (composée de fonctions continues) et ne s'annule jamais sur  $\mathbb{R}^*$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^X} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^X} = 1$ , donc  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en  $0$ .

3. La fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Elle est continue sur  $]0, +\infty[$  en tant que composée de fonctions continues, et elle est continue sur  $] -\infty, 0[$  en tant que fonction usuelle.

Enfin,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ , donc  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en  $0$ .

4. La fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$  est définie sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

Elle est continue sur  $]0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$  en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant jamais.

En  $0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , donc  $f$  est prolongeable par continuité en  $0$  en posant  $f(0) = 0$ .

En  $1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ , donc  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en  $1$ .

**5** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$ .

Montrer que  $f$  admet au moins un point fixe sur  $[0, 1]$  (i.e. qu'il existe  $t \in [0, 1]$  tel que  $f(t) = t$ ).

Soit  $g$  la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = f(x) - x.$$

La fonction  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  (car  $f$  et  $x \mapsto -x$  le sont).

De plus,  $g(0) = f(0) \in [0, 1]$ , donc  $g(0) \geq 0$ .

Et par ailleurs  $g(1) = f(1) - 1 \in [-1, 0]$ , donc  $g(1) \leq 0$ .

Ainsi,  $0 \in [g(1), g(0)]$ .

D'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe nécessairement un  $t \in [0, 1]$  tel que  $g(t) = 0$ , autrement dit tel que :  $f(t) = t$ .

**6** Montrer que l'équation  $\ln(x) = -x$  admet une unique solution sur  $]0; +\infty[$ .

Notons pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\varphi(x) = \ln(x) + x$ .

La fonction  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$  (comme somme de fonctions continues), et est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  (comme somme de deux fonctions strictement croissantes sur  $]0, +\infty[$ ).

Ainsi,  $\varphi$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  vers  $\varphi(]0, +\infty[) = ]\lim_{0^+} \varphi, \lim_{+\infty} \varphi[ = ]-\infty, +\infty[$ .

Comme  $0 \in \varphi(]0, +\infty[)$ , il existe un unique  $\alpha \in ]0, +\infty[$  tel que  $\varphi(\alpha) = 0$ , c'est-à-dire tel que  $\ln(\alpha) = -\alpha$ .



7 Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$ .

1. Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer que l'équation  $f(x) = -\ln(x)$  admet une unique solution sur  $]0; +\infty[$ .

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4(e^x + 7) - 28}{e^x + 7} = 4 - \frac{28}{e^x + 7}.$$

- ★  $x \mapsto e^x + 7$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $]7, +\infty[$ .
- ★  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est strictement décroissante sur  $]7, +\infty[$  à valeurs dans  $]0, \frac{1}{7}[$ .
- ★  $x \mapsto 4 - 28x$  est strictement décroissante sur  $]0, 4[$ .

Par composition,  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. On a :

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{4}{7}e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

donc  $\mathcal{C}_f$  admet au voisinage de  $-\infty$  une asymptote horizontale en  $-\infty$  d'équation  $y = 0$ .

$$f(x) = 4 - \frac{28}{e^x + 7} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 4$$

donc  $\mathcal{C}_f$  admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote horizontale d'équation  $y = 4$ .

3. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant jamais), et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $f(\mathbb{R}) = ]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[ = ]0, 4[$ .

Comme  $1 \in ]0, 4[$ , 1 admet un unique antécédent par  $f$  dans  $\mathbb{R}$ , autrement dit l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution.

4. La fonction  $\varphi : x \mapsto f(x) + \ln(x)$  est continue sur  $]0, +\infty[$  (somme de fonctions continues) et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  (somme de fonctions strictement croissantes), donc  $\varphi$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  vers  $\varphi(]0, +\infty[) = ]\lim_0 \varphi, \lim_{+\infty} \varphi[ = ]-\infty, +\infty[$ .

Comme  $0 \in \varphi(]0, +\infty[)$ , l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une unique solution dans  $]0, +\infty[$ , autrement dit il existe un unique  $x$  tel que  $f(x) = -\ln(x)$ .

8 Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et décroissante.

Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution.

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - x$$

La fonction  $f$  est continue, donc par somme,  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  étant décroissante, et la fonction  $x \mapsto -x$  étant strictement décroissante, par somme, la fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi,  $h$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $h(\mathbb{R}) = ]\lim_{+\infty} h, \lim_{-\infty} h[$ .

Comme  $f$  est décroissante, elle admet une limite en  $+\infty$  : soit un réel  $\ell$ , soit  $-\infty$ . Dans tous les cas :

$$h(x) = f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

Comme  $f$  est décroissante, elle admet une limite en  $-\infty$  : soit un réel  $\ell'$  soit  $+\infty$ . Dans tous les cas :

$$h(x) = f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$$

Donc dans tous les cas  $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Comme  $0 \in h(\mathbb{R})$ ,  $0$  admet un unique antécédent par  $h$  dans  $\mathbb{R}$ , donc l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution.

**9** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[1, 2]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Montrer qu'il existe deux constantes  $k_1$  et  $k_2$  telles que :  $\forall x \in [1, 2], k_1x \leq f(x) \leq k_2x$ .

Notons  $h$  la fonction définie sur  $[1, 2]$  par :

$$\forall x \in [1, 2], \quad h(x) = \frac{f(x)}{x}$$

La fonction  $h$  est continue (quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant jamais), sur un segment.

Donc  $h$  est bornée sur  $[1, 2]$  et atteint ses bornes :

il existe  $k_1$  et  $k_2$  deux constantes telles que :

$$\forall x \in [1, 2], \quad k_1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq k_2$$

et on a alors :

$$\forall x \in [1, 2], \quad k_1x \leq f(x) \leq k_2x$$

**10** Soit  $f$  une fonction croissante et majorée sur  $[1, +\infty[$ .

On suppose que la fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  est croissante sur  $]1, +\infty[$ .

1. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ .
2. En déduire le signe de  $\varphi$  sur  $]1, +\infty[$ .
3. Montrer finalement que  $f$  est constante sur  $[1, +\infty[$ .

1. La fonction  $f$  est supposée croissante et majorée, donc elle admet une limite finie  $\ell$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . Dans tous les cas, on a au voisinage de  $+\infty$  :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(x) - f(1)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

La fonction  $\varphi$  admet donc pour limite en 0 en  $+\infty$ .

2. La fonction  $\varphi$  étant croissante de limite nulle en  $+\infty$ , elle est nécessairement négative (car sa limite doit être sa borne supérieure), ainsi :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \varphi(x) \leq 0$$

3. Or, la fonction  $f$  est supposée croissante au départ, donc :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \quad x \geq 1 \implies f(x) \geq f(1) \quad \text{et donc} \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq 0$$

On a donc :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \varphi(x) \geq 0$$

Finalement, pour tout  $x \in ]1, +\infty[, \varphi(x) = 0$ , autrement dit :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, f(x) - f(1) = 0$$

La fonction  $f$  est donc constante égale à  $f(1)$  sur  $[1, +\infty[$

**11** Soit  $f$  une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}$  telle que :  $f(x+1) + f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .

- Justifier que  $f$  admet une limite en  $+\infty$  et préciser sa valeur.
- Montrer que pour tout  $x > 0$  :  $\frac{f(x+1) + f(x)}{2} \leq f(x) \leq \frac{f(x) + f(x-1)}{2}$ .
- En déduire que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ .

1. La fonction  $f$  étant décroissante, elle admet nécessairement une limite en  $+\infty$  (finie ou infinie).

Raisonnons par l'absurde. Si jamais on avait  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , alors on aurait aussi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = -\infty$ , et donc :

$$f(x+1) + f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

ce qui contredit le fait que  $f(x+1) + f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, nécessairement,  $f$  admet une limite finie  $\ell$  au voisinage de  $+\infty$ .

On a donc alors :

$$f(x+1) + f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell + \ell = 2\ell$$

et aussi :

$$f(x+1) + f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Par unicité de la limite, on a donc nécessairement  $2\ell = 0$ , autrement dit  $\ell = 0$ .

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

2. Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $f$  étant décroissante sur  $[x-1, x+1]$ , on a :

$$f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$$

D'où :

$$\frac{f(x+1) + f(x)}{2} \leq \frac{f(x) + f(x)}{2} \leq \frac{f(x-1) + f(x)}{2}$$

autrement dit :

$$\frac{f(x+1) + f(x)}{2} \leq f(x) \leq \frac{f(x) + f(x-1)}{2}$$

3. Or, d'après les hypothèses, on sait que :

$$\frac{f(x+1) + f(x)}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$$

et

$$\frac{f(x) + f(x-1)}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{2(x-1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

Par encadrement, on a donc bien :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$$

**12** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un même intervalle  $I$ . On définit les fonctions  $\sup(f, g)$  et  $\inf(f, g)$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left( \sup(f, g) \right)(x) = \max(f(x), g(x)), \quad \text{et} \quad \left( \inf(f, g) \right)(x) = \min(f(x), g(x))$$

1. Vérifier que :  $\sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$  et  $\inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$ .

En déduire que les fonctions  $\sup(f, g)$  et  $\inf(f, g)$  sont continues sur  $I$ .

2. On pose  $f^+ = \sup(f, 0)$  et  $f^- = \sup(-f, 0) = -\inf(f, 0)$ .

Exprimer  $f^+$  et  $f^-$  à l'aide de  $f$  et  $|f|$ . En déduire que  $f^+$  et  $f^-$  sont continues sur  $I$ .

1. Pour tout réel  $x$  :

• En supposant par exemple que  $f(x) \geq g(x)$  (alors  $\sup(f, g)(x) = f(x)$  et  $\inf(f, g)(x) = g(x)$ ), on a :

$$\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) + (f(x) - g(x))}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$

et

$$\frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) - (f(x) - g(x))}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x)$$

• Si on avait  $g(x) \geq f(x)$  on ferait de même (les r les de  $f$  et  $g$  sont symétriques ici).

Ainsi, on a bien :

$$\sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

les fonctions  $\sup(f, g)$  et  $\inf(f, g)$  sont donc des sommes de composées de fonctions continues, donc sont continues.

2. On a :

$$f^+ = \frac{f + |f|}{2} \quad \text{et} \quad f^- = \frac{-f + |f|}{2} = \frac{|f| - f}{2}$$

Ainsi,  $f^+$  et  $f^-$  sont des sommes de composées de fonctions continues, donc sont continues.