$\boxed{1}$

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$.
8. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-2}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x}{|x+2|}$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-2\cos(x))$.
14. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

1. Au voisinage de $1^+$, $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$.
2. Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$.
3. Au voisinage de $\pm\infty$, $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \boxed{1}$.
4. Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{|x|}{x} = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{1}$.
5. Au voisinage de $-\infty$, $\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{|x|}{x} = -1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{-1}$.
6. Au voisinage de 0, on a $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{|x|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.
   - Sans problème, à gauche de 0 : $\dfrac{1}{x} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \boxed{-\infty}$.
   - Au voisinage de 0 à droite, on a en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{1}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}} = \frac{-\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}} = \frac{-1-x}{1+\sqrt{1+x+x^2}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

7. Au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned}
x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right) &= x\frac{(x+\sqrt{x+1})-(x+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}}\\
&= \frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\\
&= \frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}}\times\frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{2\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

8. Au voisinage de 1, on a :

$$\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}\underset{x\to1}{\longrightarrow}\boxed{\frac{1}{2}}$$

9. Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\dfrac{|x|}{x}=1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{1}$.

10. Au voisinage de 0, $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est borné, donc $x\times\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$.

11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin(x)=\lim_{X\to0^+}X\sin\left(\frac{1}{X}\right)=\boxed{0}$ d'après la question précédente.

12. Au voisinage de $-2$, $\dfrac{x}{|x+2|}\underset{x\to-2}{\longrightarrow}\boxed{-\infty}$.

13. Au voisinage de $+\infty$, $x-2\cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$.

14. Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{\pi}{2}+0=\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-e^x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x}\ln(x)$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \ln(x^2+x)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^{1/x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\ln(x)}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^{1/x}$.

1. $x^{\sqrt{x}} = \exp\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$.
   Or, par croissances comparées, $\sqrt{x}\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   $$x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = \boxed{1}$$

2. $\dfrac{x^2}{1+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit donc que :
   $$\sqrt{x}\ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$$

3. $\sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right) = \sqrt{x}(\ln(x^2)-\ln(1+x)) = 2\sqrt{x}\ln(x) - \sqrt{x}\ln(1+x)$.
   Par croissances comparées, $\sqrt{x}\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc :
   $$2\sqrt{x}\ln(x) - \sqrt{x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0-0 = \boxed{0}$$

4. $x^2e^{-e^x} = \dfrac{x^2}{e^{e^x}} = \dfrac{x^2}{e^x} \times \dfrac{e^x}{e^{e^x}}$.
   Par croissances comparées $\dfrac{x^2}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Et par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^{e^x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$.
   Donc :
   $$\frac{x^2}{e^x} \times \frac{e^x}{e^{e^x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$$

5. $$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} e^{-X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln(X)}{e^X} = \boxed{0}$$
   car $\ln(X) = \underset{X\to+\infty}{o}\left(e^X\right)$ par croissances comparées.

6. $$\lim_{x\to-\infty} e^x\ln(x^2+x) = \lim_{X\to+\infty} e^{-X}\ln(X^2-X) = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X^2-X)}{e^X}$$
   Or, $X^2-X \underset{X\to+\infty}{\sim} X^2 \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\ln(X^2-X) \underset{X\to+\infty}{\sim} \ln(X^2) = 2\ln(X)$. Ainsi :
   $$\frac{\ln(X^2-X)}{e^X} \underset{X\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(X)}{e^X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$$

7.
$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$$

Or,
$$\frac{\ln(x+1)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc :
$$\exp\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = \boxed{1}$$

8.
$$x^{\ln(x)} = \exp\left(\ln(x)\ln(x)\right) = \exp\left(\ln^2(x)\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$$

9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{X\to+\infty} (1+X)^{1/X} = \boxed{1}$ d'après la question 7.

10.
$$\left(\frac{e^x}{x}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(e^x)-\ln(x)}{x}\right) = \exp\left(\frac{x-\ln(x)}{x}\right) = \exp\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc :
$$\exp\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{e^1}$$

**3** Étudier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

1. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$
4. $x \mapsto \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$
5. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$
6. $x \mapsto x\left|x+\dfrac{1}{x}\right|$
7. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
8. $x \mapsto x^x$.
9. $x \mapsto x^2\exp\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right)$

Les fonctions sont prolongeables par continuité en 0 si et seulement si elles admettent une limite finie en 0.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ (produit d'une fonction tendant vers 0 par une fonction bornée).
   Ainsi, $f : x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$, donc $x \mapsto e^{1/x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0 (on n'a pas les mêmes limites à droite et à gauche, ou alors tout simplement une des limites est infinie).
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$, et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$.
   Donc $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0 (limites différentes à droite et à gauche).
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x-1} = -1$.
   et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x+1} = -1$
   Donc $f : x \mapsto \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$ est la moitié de la limite du taux d'accroissement en 0 de la fonction $f$ qui à $x$ associe $\sqrt{1+x}$. C'est donc $f'(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{4}$.
6. En $0^+$, $x\left|x+\frac{1}{x}\right| = x\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2+1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.
   Et en $0^-$, $x\left|x+\frac{1}{x}\right| = x\left(-x-\frac{1}{x}\right) = -x^2-1 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -1$.
   Donc la fonction $x \mapsto x\left|x+\frac{1}{x}\right|$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
7. En $0^+$ (et en $0^-$), $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite, donc ne peut pas être prolongeable par continuité en 0.
8. $x^x = e^{x\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1$ (par croissances comparées), donc $f : x \mapsto x^x$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\exp\left(\frac{\cos(x)}{x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^{X\cos(1/X)}}{X^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^{X\cos(1/X)}}{(X\cos(1/X))^2} = +\infty$ par croissances comparées, donc nécessairement la fonction ne peut pas être prolongeable par continuité en 0.

**4** Étudier la définition, la continuité, et le prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto (1+x)\ln(1+x)$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$
3. $x \longmapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
4. $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$

1. La fonction $f : x \mapsto (1+x)\ln(1+x)$ est définie sur $]-1, +\infty[$. Elle est continue sur $]-1, +\infty[$ en tant que produit de composées de fonctions continues.
   De plus, en $-1$, $\lim\limits_{x\to -1}(1+x)\ln(1+x) = \lim\limits_{u\to 0} u\ln(u) = 0$ (par croissances comparées), donc $f$ est même prolongeable par continuité en $-1$ en posant $f(-1) = 0$.
2. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ car la fonction $x \mapsto 1 + e^{1/x}$ est continue (composée de fonctions continues) et ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^*$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{X\to +\infty} \frac{1}{1+e^X} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{X\to -\infty} \frac{1}{1+e^X} = 1$, donc $f$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
3. La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   Elle est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que composée de fonctions continues, et elle est continue sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction usuelle.
   Enfin, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, donc $f$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
   Elle est continue sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant jamais.
   En 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, donc $f$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
   En 1, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, donc $f$ n'est pas prolongeable par continuité en 1.

**5** Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.
Montrer que $f$ admet au moins un point fixe sur $[0,1]$ (i.e. qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = t$).

Soit $g$ la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ \ g(x) = f(x) - x.$$

La fonction $g$ est continue sur $[0,1]$ (car $f$ et $x \mapsto -x$ le sont).
De plus, $g(0) = f(0) \in [0,1]$, donc $g(0) \geqslant 0$.
Et par ailleurs $g(1) = f(1) - 1 \in [-1,0]$, donc $g(1) \leqslant 0$.
Ainsi, $0 \in [g(1), g(0)]$.
D'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe nécessairement un $t \in [0,1]$ tel que $g(t) = 0$, autrement dit tel que : $f(t) = t$.

**6** Montrer que l'équation $\ln(x) = -x$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$.

Notons pour tout $x \in ]0, +\infty[$, $\varphi(x) = \ln(x) + x$.
La fonction $\varphi$ est continue sur $]0, +\infty[$ (comme somme de fonctions continues), et est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (comme somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0, +\infty[$).
Ainsi, $\varphi$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\varphi(]0, +\infty[) = ]\lim\limits_{0^+} \varphi, \lim\limits_{+\infty} \varphi[ = ] - \infty, +\infty[$.

Comme $0 \in \varphi(]0, +\infty[)$, il existe un unique $\alpha \in ]0, +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, c'est-à-dire tel que $\ln(\alpha) = -\alpha$.

$\boxed{7}$ Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x+7}$.

1. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution.
4. Montrer que l'équation $f(x) = -\ln(x)$ admet une unique solution.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4(e^x+7)-28}{e^x+7} = 4 - \dfrac{28}{e^x+7}$.

   ⋆ $x \mapsto e^x + 7$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]7, +\infty[$.
   ⋆ $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]7, +\infty[$ à valeurs dans $]0, \frac{1}{7}[$.
   ⋆ $x \mapsto 4 - 28x$ est strictement décroissante sur $]0, 4[$.

   Par composition, $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On a :
$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x+7} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{4}{7}e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$
   donc $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$.
$$f(x) = 4 - \frac{28}{e^x+7} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 4$$
   donc $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 4$.

3. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant jamais), et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = ]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f[ = ]0, 4[$.

   Comme $1 \in ]0, 4[$, 1 admet un unique antécédent par $f$ dans $\mathbb{R}$, autrement dit l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution.

4. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) + \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions continues) et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions strictement croissantes), donc $\varphi$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\varphi(]0, +\infty[) = ]\lim\limits_{0} \varphi, \lim\limits_{+\infty} \varphi[ = ]-\infty, +\infty[$.

   Comme $0 \in \varphi(]0, +\infty[)$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, autrement dit il existe un unique $x$ tel que $f(x) = -\ln(x)$.

**8** Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et décroissante.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

.

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - x$$

La fonction $f$ est continue, donc par somme, $h$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $f$ étant décroissante, et la fonction $x \mapsto -x$ étant strictement décroissante, par somme, la fonction $h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $h$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $h(\mathbb{R}) = ]\lim\limits_{+\infty} h, \lim\limits_{-\infty} h[$.

Comme $f$ est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$ : soit un réel $\ell$, soit $-\infty$. Dans tous les cas :

$$h(x) = f(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Comme $f$ est décroissante, elle admet une limite en $-\infty$ : soit un réel $\ell'$ soit $+\infty$. Dans tous les cas :

$$h(x) = f(x) - x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc dans tous les cas $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Comme $0 \in h(\mathbb{R})$, 0 admet un unique antécédent par $h$ dans $\mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Soit $f$ une fonction continue sur $[1,2]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Montrer qu'il existe deux constantes $k_1$ et $k_2$ telles que : $\forall x \in [1,2],\ k_1 x \leqslant f(x) \leqslant k_2 x$.

Notons $h$ la fonction définie sur $[1,2]$ par :

$$\forall x \in [1,2], \quad h(x) = \frac{f(x)}{x}$$

La fonction $h$ est continue (quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant jamais), sur un segment.
Donc $h$ est bornée sur $[1,2]$ et atteint ses bornes :
il existe $k_1$ et $k_2$ deux constantes telles que :

$$\forall x \in [1,2], \quad k_1 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant k_2$$

et on a alors :

$$\forall x \in [1,2], \quad k_1 x \leqslant f(x) \leqslant k_2 x$$

$\boxed{10}$ Soit $f$ une fonction croissante et majorée sur $[1, +\infty[$.

On suppose que la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ est croissante sur $]1, +\infty[$.

1. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.
2. En déduire le signe de $\varphi$ sur $]1, +\infty[$.
3. Montrer finalement que $f$ est constante sur $[1, +\infty[$.

1. La fonction $f$ est supposée croissante et majorée, donc elle admet une limite finie $\ell$ lorsque $x \to +\infty$. Dans tous les cas, on a au voisinage de $+\infty$ :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{f(x) - f(1)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

   La fonction $\varphi$ admet donc pour limite en 0 en $+\infty$.

2. La fonction $\varphi$ étant croissante de limite nulle en $+\infty$, elle est nécessairement négative (car sa limite doit être sa borne supérieure), ainsi :

$$\forall x \in ]1, +\infty[,\ \varphi(x) \leqslant 0$$

3. Or, la fonction $f$ est supposée croissante au départ, donc :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \quad x \geqslant 1 \Longrightarrow f(x) \geqslant f(1) \quad \text{et donc } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geqslant 0$$

   On a donc :

$$\forall x \in ]1, +\infty[,\ \varphi(x) \geqslant 0$$

   Finalement, pour tout $x \in ]1, +\infty[$, $\varphi(x) = 0$, autrement dit :

$$\forall x \in ]1, +\infty[,\ f(x) - f(1) = 0$$

   La fonction $f$ est donc constante égale à $f(1)$ sur $[1, +\infty[$

**11** Soit $f$ une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x+1)+f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

1. Justifier que $f$ admet une limite en $+\infty$ et préciser sa valeur.
2. Montrer que pour tout $x>0$ : $\dfrac{f(x+1)+f(x)}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{f(x)+f(x-1)}{2}$.
3. En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

1. La fonction $f$ étant décroissante, elle admet nécessairement une limite en $+\infty$ (finie ou infinie).

   Raisonnons par l'absurde. Si jamais on avait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, alors on aurait aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) = -\infty$, et donc :
   $$f(x+1)+f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$
   ce qui contredit le fait que $f(x+1)+f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Ainsi, nécessairement, $f$ admet une limite finie $\ell$ au voisinage de $+\infty$.

   On a donc alors :
   $$f(x+1)+f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell+\ell = 2\ell$$
   et aussi :
   $$f(x+1)+f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   Par unicité de la limite, on a donc nécessairement $2\ell = 0$, autrement dit $\ell = 0$.
   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

2. Pour tout $x>0$, la fonction $f$ étant décroissante sur $[x-1, x+1]$, on a :
   $$f(x+1) \leqslant f(x) \leqslant f(x-1)$$
   D'où :
   $$\frac{f(x+1)+f(x)}{2} \leqslant \frac{f(x)+f(x)}{2} \leqslant \frac{f(x-1)+f(x)}{2}$$
   autrement dit :
   $$\frac{f(x+1)+f(x)}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{f(x)+f(x-1)}{2}$$

3. Or, d'après les hypothèses, on sait que :
   $$\frac{f(x+1)+f(x)}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2x}$$
   et
   $$\frac{f(x)+f(x-1)}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{x-1}}{2} = \frac{1}{2(x-1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$
   Par encadrement, on a donc bien :
   $$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$$

**12** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un même intervalle $I$. On définit les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\sup(f,g)\right)(x) = \max(f(x),g(x)), \qquad \text{et} \qquad \left(\inf(f,g)\right)(x) = \min(f(x),g(x))$$

1. Vérifier que : $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$.
   En déduire que les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur $I$.
2. On pose $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0) = -\inf(f,0)$.
   Exprimer $f^+$ et $f^-$ à l'aide de $f$ et $|f|$. En déduire que $f^+$ et $f^-$ sont continues sur $I$.

1. Pour tout réel $x$ :
   - En supposant par exemple que $f(x) \geqslant g(x)$ (alors $\sup(f,g)(x) = f(x)$ et $\inf(f,g)(x) = g(x)$), on a :

   $$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+\Big(f(x)-g(x)\Big)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$$

   et

   $$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-\Big(f(x)-g(x)\Big)}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x)$$

   - Si on avait $g(x) \geqslant f(x)$ on ferait de même (les rôles de $f$ et $g$ sont symétriques ici).

   Ainsi, on a bien :

   $$\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(f,g) = \frac{f-g-|f-g|}{2}$$

   les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont donc des sommes de composées de fonctions continues, donc sont continues.
2. On a :

   $$f^+ = \frac{f+|f|}{2} \quad \text{et} \quad f^- = \frac{-f+|f|}{2} = \frac{|f|-f}{2}$$

   Ainsi, $f^+$ et $f^-$ sont des sommes de composées de fonctions continues, donc sont continues.