

1 Calculs de limites

1

Déterminer les limites suivantes :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$. 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$. 3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$. 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$. 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} \right)$. 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x-1}} \right)$. | <ol style="list-style-type: none"> 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1} \right)$. 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x - 2}$. 10. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$. 12. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{ x+2 }$. 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \cos(x))$. 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right)$. |
|---|---|

2 Déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|--|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}}$. 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$. | <ol style="list-style-type: none"> 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-e^x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x} \ln(x)$. 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(x^2 + x)$. 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{1/x}$. | <ol style="list-style-type: none"> 8. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\ln(x)}$. 9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)^{1/x}$. |
|--|--|---|

3  tudier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

- | | | |
|--|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. 2. $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. 3. $x \mapsto \frac{ x }{x}$. | <ol style="list-style-type: none"> 4. $x \mapsto \frac{x^2 + x }{x^2 - x }$. 5. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{2x}$. 6. $x \mapsto x \left x + \frac{1}{x} \right$. | <ol style="list-style-type: none"> 7. $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. 8. $x \mapsto x^x$. 9. $x \mapsto x^2 \exp\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$. |
|--|---|--|

4  tudier la définition, la continuité, et le prolongement par continuité des fonctions suivantes :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $x \mapsto (1+x) \ln(1+x)$ 2. $x \mapsto \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ | <ol style="list-style-type: none"> 3. $x \mapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ 4. $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ |
|---|---|

2 Continuité sur un intervalle

5 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.

Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[0, 1]$ (i.e. qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $f(t) = t$).

6 Montrer que l'équation $\ln(x) = -x$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$.

7 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$.

1.  tudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. Démontrer que la courbe \mathcal{C}_f admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .
4. Montrer que l'équation $f(x) = -\ln(x)$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$.

8 Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et décroissante.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution. .

9 Soit f une fonction continue sur $[1, 2]$ à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} .

Montrer qu'il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que : $\forall x \in [1, 2], k_1x \leq f(x) \leq k_2x$.

10 Soit f une fonction croissante et majorée sur $[1, +\infty[$.

On suppose que la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ est croissante sur $]1, +\infty[$.

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.
2. En déduire le signe de φ sur $]1, +\infty[$.
3. Montrer finalement que f est constante sur $[1, +\infty[$.

11 Soit f une fonction décroissante sur \mathbb{R} telle que : $f(x + 1) + f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

1. Justifier que f admet une limite en $+\infty$ et préciser sa valeur.
2. Montrer que pour tout $x > 0$: $\frac{f(x + 1) + f(x)}{2} \leq f(x) \leq \frac{f(x) + f(x - 1)}{2}$.
3. En déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

12 Soient f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I . On définit les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\sup(f, g) \right)(x) = \max(f(x), g(x)), \quad \text{et} \quad \left(\inf(f, g) \right)(x) = \min(f(x), g(x))$$

1. Vérifier que : $\sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$ et $\inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$.
En déduire que les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues sur I .
2. On pose $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0) = -\inf(f, 0)$.
Exprimer f^+ et f^- à l'aide de f et $|f|$. En déduire que f^+ et f^- sont continues sur I .