1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+3x+1}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2-4}}$
3. $h : x \mapsto \ln(\ln(|x|))$
4. $v : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$
5. $u : x \mapsto \ln^3(x)$
6. $w : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
7. $z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$f(x) \text{ existe } \iff 2x^2+3x+1 \geqslant 0 \iff (x+1)(2x+1) \geqslant 0 \iff x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant -\frac{1}{2}$$
$$\boxed{D_f = \left]-\infty,-1\right] \cup \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[}$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$g(x) \text{ existe } \iff \left\{\begin{array}{l} x^2-4 \neq 0 \\ \dfrac{2x+3}{x^2-4} \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \notin \{-2,2\} \\ (2x+3)(x^2-4) \geqslant 0 \end{array}\right. \iff x \in \left]-2,-\frac{3}{2}\right] \cup \left]2,+\infty\right[$$
$$\boxed{D_g = \left]-2,-\frac{3}{2}\right] \cup \left]2,+\infty\right[}$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$h(x) \text{ existe } \iff \left\{\begin{array}{l} |x| > 0 \\ \ln(|x|) > 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ \ln(|x|) > \ln(1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ |x| > 1 \end{array}\right. \iff x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$
$$\boxed{D_h =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$v(x) \text{ existe } \iff \left\{\begin{array}{l} x^2-1 \neq 0 \\ \left|\dfrac{x}{x^2-1}\right| > 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{array}\right. \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$$
$$\boxed{D_v = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}}$$
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$u(x) \text{ existe } \iff \ln(x) \text{ existe } \iff x > 0$$
$$\boxed{D_u =]0,+\infty[}$$
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$w(x) \text{ existe } \iff \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) \text{ existe } \iff \left\{\begin{array}{l} 1+x > 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \iff x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$$
$$\boxed{D_w =]-1,0[\cup]0,+\infty[}$$
(Remarquons que $w(x)$ a aussi un sens si $x = -(2k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, mais cela aura peu d'intérêt d'étudier w ailleurs que sur un intervalle).
7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$z(x) \text{ existe } \iff \left\{\begin{array}{l} \ln(x) \text{ existe} \\ \sqrt{-\ln(x)} \text{ existe} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ -\ln(x) \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ \ln(x) \leqslant 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ x \leqslant 1 \end{array}\right. \iff x \in]0,1]$$
$$\boxed{D_z =]0,1]}$$

2 Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.
Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f, puis montrer que f est impaire sur D_f.

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on a $1 + e^x > 1$, donc le dénominateur ne s'annule jamais. La fonction f est donc bien définie sur $D_f = \mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^x-1)}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

La fonction f est bien impaire.

3 Étudier les axes et centres de symétrie des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2-5x-7}{x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \qquad f_3(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-x-1}, \qquad f_4(x) = \frac{5x+7}{3x-2}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_1(x) \text{ existe } \iff x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$$
Ainsi, le domaine de définition de f_1 est $D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$
S'il y a une symétrie, les x doivent être symétriques par rapport à 1.

   Regardons donc $f_1(1+h)$ et $f_1(1-h)$ pour voir s'il y a une relation.
$$f_1(1-h) = \frac{(1-h)^2-5(1-h)-7}{(1-h)-1} = \frac{1-2h+h^2-5+5h-7}{-h} = \frac{h^2+3h-11}{-h} = \frac{-h^2-3h+11}{h}$$
$$f_1(1+h) = \frac{(1+h)^2-5(1+h)-7}{(1+h)-1} = \frac{1+2h+h^2-5-5h-7}{h} = \frac{h^2-3h-11}{h}$$
On a donc
$$f_1(1-h)+f_1(1+h) = -6$$
autrement dit, pour tout $h > 0$,
$$\frac{f_1(1-h)+f_1(1+h)}{2} = -3$$
Autrement dit, le point de coordonnées $(1; -3)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f_1.
2. Le domaine de définition de f_2 est $\mathbb{R}$. Regardons donc (sans autre indication) s'il y a une symétrie par rapport à 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_2(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$
On a donc
$$f_2(x)+f_2(-x) = \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$$
autrement dit, pour tout $x > 0$,
$$\frac{f_2(x)+f_2(-x)}{2} = \frac{1}{2}$$
Ainsi, le point de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f_2.
3. Le domaine de définition de f_3 est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\}$, donc est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$.
$$f_3\left(\frac{1}{2}+h\right) = \cdots = \cdots = \frac{h^2-\frac{9}{4}}{h^2-\frac{5}{4}} \qquad \text{et} \qquad f_3\left(\frac{1}{2}-h\right) = \cdots = \cdots = \frac{h^2-\frac{9}{4}}{h^2-\frac{5}{4}}$$
donc f_3 admet un axe de symétrie d'équation $x = \frac{1}{2}$.
4. Le domaine de définition de f_4 est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$. et
$$f_4\left(\frac{2}{3}+h\right) = \frac{\frac{10}{3}+5h+7}{h} = \frac{31}{3h}+5 \qquad \text{et} \qquad f_4\left(\frac{2}{3}-h\right) = \frac{\frac{10}{3}-5h+7}{-h} = \frac{-31}{3h}+5$$
donc $\frac{f_4\left(\frac{2}{3}+h\right)+f_4\left(\frac{2}{3}-h\right)}{2} = 5$, f_4 admet un centre de symétrie, le point de coordonnées $(\frac{2}{3}; 5)$.

$\boxed{4}$ Pour chaque fonction suivante, déterminer le domaine de définition, puis étudier ses variations sans dériver en étudiant une composition de fonctions monotones.

1. $f : x \mapsto e^{-\sqrt{2-x}}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(e^{-x}-1)}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{1-\ln(1+x)}$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-e^{2-x}}}$
5. $f : x \mapsto (\ln(e^{-x}+1))^2$
6. $f : x \mapsto \sqrt{e^{2+x}-1}$

1. $f : x \mapsto e^{-\sqrt{2-x}}$ est définie sur $]-\infty, 2]$.
   $t \mapsto 2-t$ est décroissante sur $]-\infty, 2]$, à valeurs dans $[0, +\infty[$
   $u \mapsto \sqrt{u}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$
   $v \mapsto -v$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $]-\infty, 0]$
   $w \mapsto e^w$ est croissante sur $]-\infty, 0]$, à valeurs dans $]0, 1]$.
   Par composition, on en déduit que f est croissante sur $]-\infty, 2]$, et à valeurs dans $]0, 1]$.

2. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(e^{-x}-1)}$ est définie sur $]-\infty, -\ln(2)]$.
   $t \mapsto -t$ est décroissante sur $]-\infty, -\ln(2)]$, à valeurs dans $[\ln(2), +\infty[$
   $u \mapsto e^u$ est croissante sur $[\ln(2), +\infty[$, à valeurs dans $[2, +\infty[$
   $v \mapsto v-1$ est croissante sur $[2, +\infty[$, à valeurs dans $[1, +\infty[$
   $w \mapsto \ln(w)$ est croissante sur $[1, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$
   $z \mapsto \sqrt{z}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$
   Par composition, on en déduit que f est décroissante sur $]-\infty, -\ln(2)]$, et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

3. $f : x \mapsto \sqrt{1-\ln(1+x)}$ est définie sur $]-1, e-1]$
   $t \mapsto 1+t$ est croissante sur $]-1, e-1]$, à valeurs dans $]0, e]$
   $u \mapsto \ln(u)$ est croissante sur $]0, e]$, à valeurs dans $]-\infty, 1]$
   $v \mapsto 1-v$ est décroissante sur $]-\infty, 1]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$
   $w \mapsto \sqrt{w}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$.
   Par composition, on en déduit que f est décroissante sur $]-1, e-1]$, et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

4. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-e^{2-x}}}$ est définie sur $]2, +\infty[$.
   $t \mapsto 2-t$ est décroissante sur $]2, +\infty[$, à valeurs dans $]-\infty, 0[$
   $u \mapsto e^u$ est croissante sur $]-\infty, 0[$ à valeurs dans $]0, 1[$
   $v \mapsto 1-v$ est décroissante sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]0, 1[$
   $w \mapsto \sqrt{w}$ est croissante sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]0, 1[$
   $z \mapsto \frac{1}{z}$ est décroissante sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]1, +\infty[$
   Par composition, on en déduit que f est décroissante sur $]2, +\infty[$, et à valeurs dans $]1, +\infty[$.

5. $f : x \mapsto (\ln(e^{-x}+1))^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   $x \mapsto e^{-x}+1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]1, +\infty[$
   $t \mapsto \ln(t)$ est croissante sur $]1, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$
   $u \mapsto u^2$ est croissante sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$
   Par composition, on en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$.

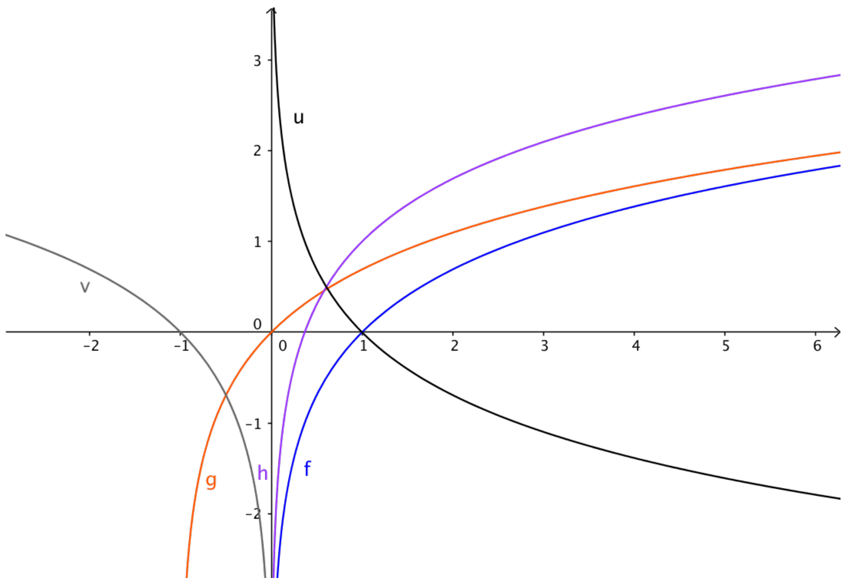
6. $f : x \mapsto \sqrt{e^{2+x}-1}$ est définie sur $[-2, +\infty[$.
   $x \mapsto 2+x$ est croissante sur $[-2, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$
   $t \mapsto e^t$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[1, +\infty[$
   $u \mapsto u-1$ est croissante sur $[1, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$

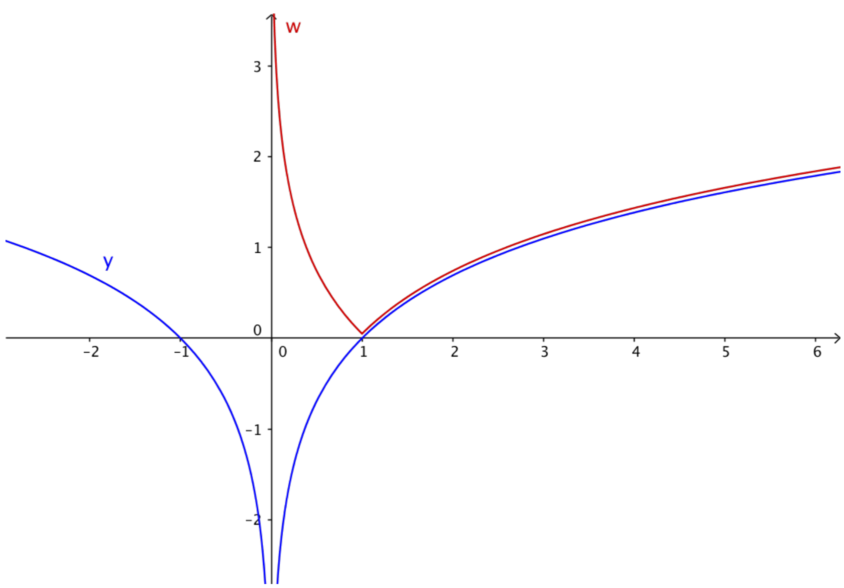
$y \mapsto \sqrt{y}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$.
Par composition, f est croissante sur $[-2, +\infty[$, et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

5 Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \ln(x+1), \quad h(x) = \ln(x) + 1,$$

$$u(x) = -\ln(x), \quad v(x) = \ln(-x), \quad w(x) = |\ln(x)|, \quad y(x) = \ln(|x|)$$

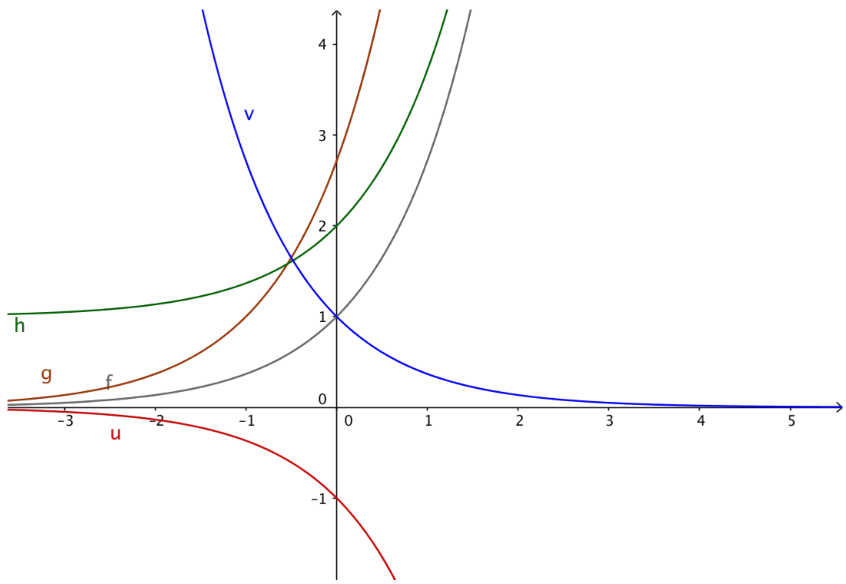


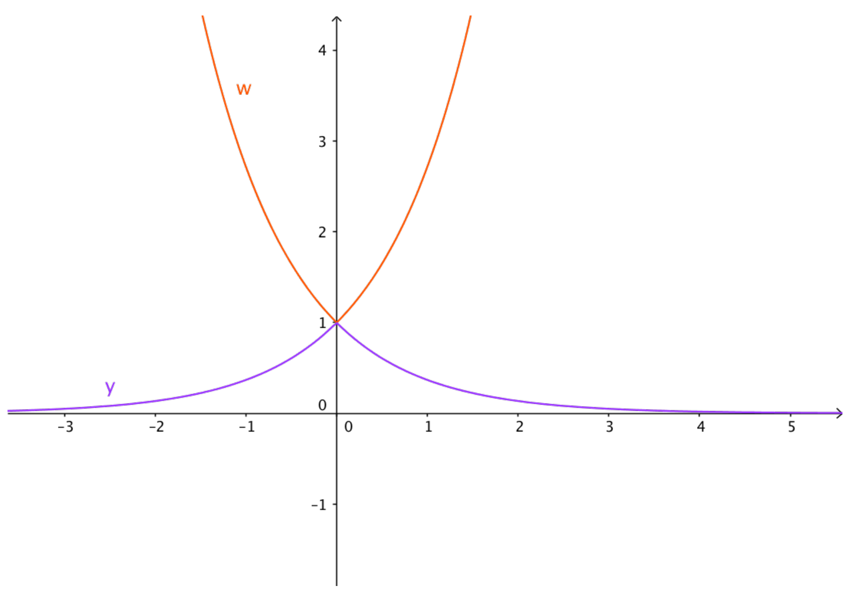


6 Tracer les courbes représentatives des fonctions :

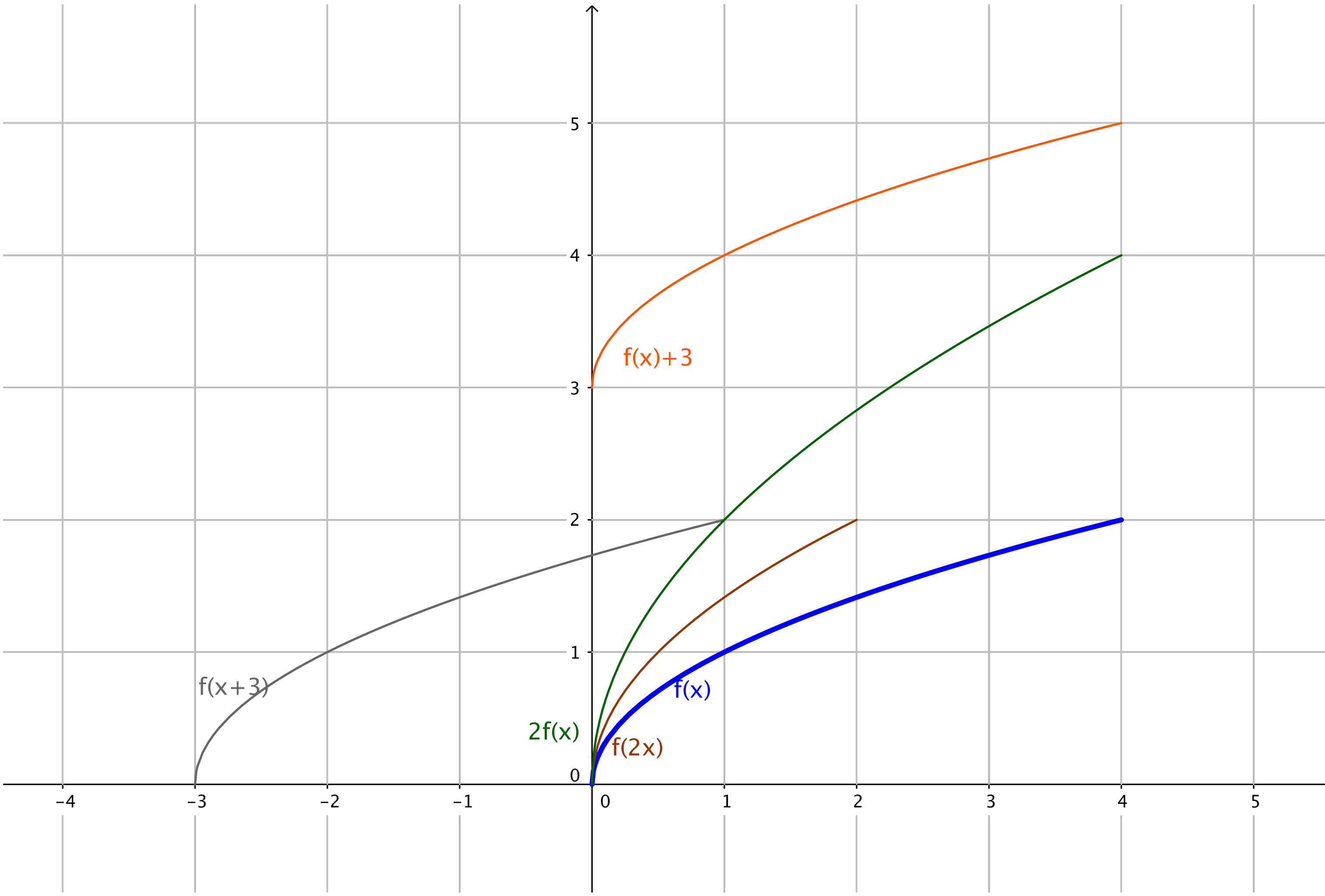
$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{x+1}, \quad h(x) = e^x + 1,$$

$$u(x) = -e^x \quad v(x) = e^{-x}, \quad w(x) = e^{|x|}, \quad y(x) = e^{-|x|}$$

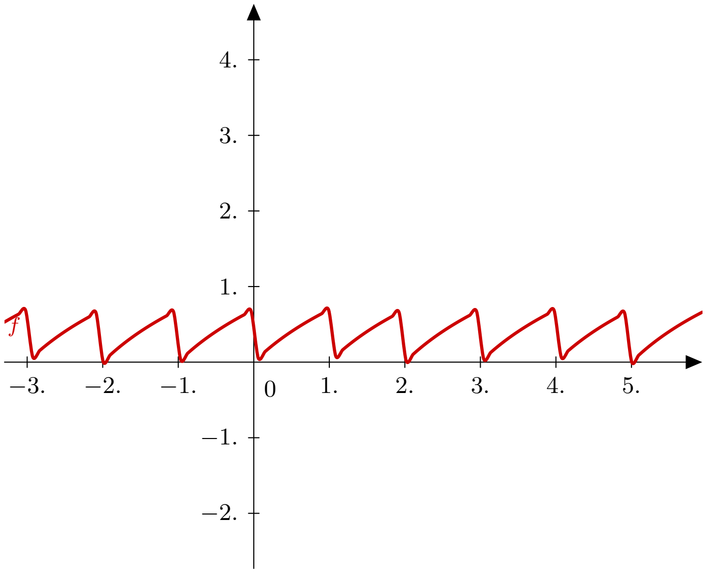




7 Tracer le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 4]$. En déduire comment tracer le graphe des fonctions : $x \mapsto f(x) + 3$, $\quad x \mapsto f(x+3)$, $\quad f(2x)$, $\quad 2f(x)$.



$\boxed{\mathbf{8}}$ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de période 1, et vérifie : pour tout réel x de $[1,2[$, $f(x)=\ln(x)$. Tracer la courbe représentative de la fonction f et déterminer l'expression de f sur l'intervalle $[-1,0[$



On a pour $x\in[-1,0[$, on a $f(x)=\ln(x+2)$.

9 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Justifier que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $1 - \frac{1}{x^2} \leqslant 1$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \leqslant 1$$

On veut trouver un réel M tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M$.
Prenons $M_0 = \max(f(0), 1)$, alors, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leqslant 1 \leqslant M_0 \qquad \text{et aussi} \qquad f(0) \leqslant M_0$$

ainsi, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M_0$. Ainsi, f est majorée.

10 Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{x}{1+x}$.

1. Sur $[0,+\infty[$ la fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
2. Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$. Déterminer ses bornes inférieures et supérieures.

Remarquons que : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = -\dfrac{(x+1)-1}{1+x} = -1 + \dfrac{1}{1+x}$.
Pour a et b positifs, on a :

$$a \leqslant b \Longrightarrow 1+a \leqslant 1+b \Longrightarrow \frac{1}{1+a} \geqslant \frac{1}{1+b} \Longrightarrow -1+\frac{1}{1+a} \geqslant -1+\frac{1}{1+b}\frac{1}{1+a} \geqslant \frac{1}{1+b} f(a) \geqslant f(b)$$

Ainsi, <u>la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$</u>
Nécessairement, f atteint son maximum en 0 : $f(0) = 0$.
De plus, on voit que $\forall x \in [0,+\infty[, f(x) > -1$, donc finalement : $\forall x \in [0,+\infty[,\ -1 < f(x) \leqslant 0$.
La fonction f est donc bornée.
Cependant, f n'admet pas de minimum. En effet, f va diminuer pour se rapprocher de -1 mais ne va jamais l'atteindre :

$$f(x) = -1 \Longleftrightarrow = \frac{-x}{1+x} = -1 \Longleftrightarrow -x = -x-1 \Longleftrightarrow -1 = 0 \ \text{ : impossible}$$

La borne supérieure de f est son plus petit majorant, c'est donc ici le maximum qui est 0.
La borne inférieure de f est son plus grand minorant, c'est donc ici -1 : c'est un minorant, et on ne peut pas en avoir de plus grand.

11

1. Déterminer les images directes suivantes :
   (a) $\exp(\mathbb{R})$
   (b) $\ln(]0,+\infty[)$
   (c) $\sin\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$
   (d) $\tan\left(\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[\right)$
   (e) $\cos\left(\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]\right)$

2. Déterminer les images réciproques suivantes :
   (a) $\exp^{-1}([-1,1])$
   (b) $\ln^{-1}(]1,2])$
   (c) $\sin^{-1}([-1,1])$
   (d) $\cos^{-1}(\mathbb{N})$

1. (a) $\exp(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$.
   (b) $\ln(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.
   (c) $\sin\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1]$.
   (d) $\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[=]-1,1[$.
   (e) $\cos\left(\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]\right) = \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$
2. (a) $\exp^{-1}([-1,1]) = \exp^{-1}(]0,1]) =]-\infty,0]$
   (b) $\ln^{-1}(]1,2]) =]e,e^2]$.
   (c) $\sin^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$
   (d) $\cos^{-1}(\mathbb{N}) = \cos^{-1}(\{0,1\}) = \cos^{-1}(\{0\}) \cup \cos^{-1}(\{1\}) = \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

$\boxed{\textbf{12}}$ Pour chaque fonction, pour tout y dans l'ensemble d'arrivée, déterminer le nombre d'antécédent(s) de y :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2+3x+4 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1/2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{4x+5}{6x-3} \end{array}, \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+x}{1-x} \end{array}$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que
$$2x^2+3x+4 = y$$
autrement dit $2x^2+3x+(4-y) = 0$.

   $\Delta = 9 - 8(4-y) = 8y - 23$.
   Si $8y-23 < 0$, alors y n'admet pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$.
   Si $8y-23 = 0$, alors y admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}$.
   Si $8y-23 > 0$, alors y admet exactement deux antécédents par f dans $\mathbb{R}$.

   L'application f n'est ni injective, ni bijective.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons tous les $x \in \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$ tels que
$$\frac{4x+5}{6x-3} = y$$
$$y = \frac{4x+5}{6x-3} \Longleftrightarrow (6x-3)y = 4x+5 \Longleftrightarrow 6xy - 4x = 5+3y \Longleftrightarrow x(6y-4) = 5+3y$$
Si $6y-4 \neq 0$, alors y admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}$.
Si $6y-4 = 0$, alors y n'admet aucun antécédent par f dans $\mathbb{R}$.
L'application g est injective, mais non surjective.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$, avec $y \neq -1$.Cherchons tous les $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ tels que
$$\frac{1+x}{1-x} = y$$
$$y = \frac{1+x}{1-x} \Longleftrightarrow (1-x)y = 1+x \Longleftrightarrow -xy - x = 1-y \Longleftrightarrow x = \frac{1-y}{-y-1} = \frac{y-1}{y+1}$$
Donc y admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
L'application h est bijective.

$\boxed{\textbf{13}}$ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$.

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
2. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

1. Remarquons que la fonction f est paire.
   Ainsi, par exemple $f(1) = f(-1)$, donc f ne peut pas être injective.
   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a clairement $f(x) > 0$, donc tout réel y strictement négatif n'admettra pas d'antécédent par f : f ne peut pas être surjective.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$.

$$\begin{aligned}
y = g(x) &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&\iff 2y = e^{-x}(e^{2x} - 1) \\
&\iff e^x 2y = e^{2x} - 1 \\
&\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\
&\iff X^2 - 2yX - 1 = 0 \quad \text{avec } X = e^x \\
&\iff X = y + \sqrt{y^2+1} \text{ ou } X = y - \sqrt{y^2+1} \\
&\iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \text{ ou } \underbrace{e^x = y - \sqrt{y^2+1}}_{\text{impossible}} \\
&\iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul antécédent par g qui est $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. On a donc

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \end{array}$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$

1. Déterminer les images réciproques $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que la restriction de g de f à $]1,+\infty[$ est bijective de $]1,+\infty[$ vers $]0,1/2[$, et déterminer g^{-1}.

1. Pour déterminer $f^{-1}(\{1\})$ on cherche tous les antécédents de 1 par f :

$$f(x) = 1 \iff \frac{x}{1+x^2} = 1 \iff \underbrace{x^2 - x + 1}_{\Delta<0} = 0 \ : \quad \text{pas de solution}$$

Donc $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$. La fonction f n'est donc pas surjective.

Pour déterminer $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$ on cherche tous les antécédents de $1/3$ par f :

$$f(x) = \frac{1}{3} \iff \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{3} \iff \underbrace{x^2 - 3x + 1}_{\Delta=5} = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Donc $f^{-1}(\{1/3\}) = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$. La fonction f n'est donc pas injective.

2. Notons :

$$g : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow &]0,1/2[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$$

Soit $y \in]0,1/2[$. Résolvons dans $]1,+\infty[$ l'équation $f(x) = y$.

$$f(x) = y \iff \frac{x}{1+x^2} = y \iff \underbrace{yx^2 - x + y}_{\Delta=1-4y^2>0} = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \underset{x>1}{\iff} x = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

En effet pour la dernière équivalence :

$$\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y} > 1 \iff \sqrt{1-4y^2} > \underbrace{2y-1}_{\text{négatif}} \ : \text{toujours vrai}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y} > 1 \iff \sqrt{1-4y^2} < 1-2y \iff 1-4y^2 < 1-4y+4y^2 \iff 4y < 8y^2 \iff 1 < 2y \ : \ \text{faux ici}$$

Ainsi, finalement, pour tout $y \in]0,1/2[$ l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution dans l'intervalle $]1/3[$ et

$$y = f(x) \iff x = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Ainsi :

$$\boxed{g^{-1} : \begin{array}{ccc}]0,1/2[& \longrightarrow &]1,+\infty[\\ y & \longmapsto & \dfrac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y} \end{array}}$$

15 1. Étudier et tracer les courbes représentatives de $f : x \mapsto \tan(\text{Arctan}(x))$ et $g : x \mapsto \text{Arctan}(\tan(x))$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\text{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\text{Arctan}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Montrer que $\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) = \dfrac{3\pi}{4}$.

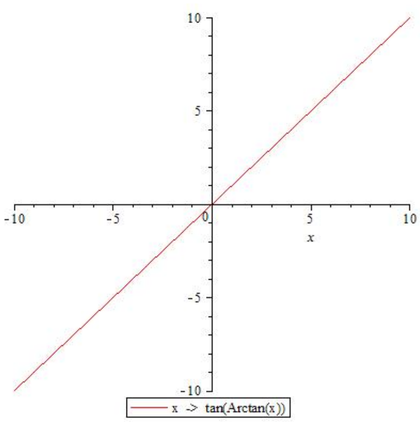
1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (car Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$, donc $\tan(\text{Arctan}(x))$ a bien un sens pour tout x), et par définition :

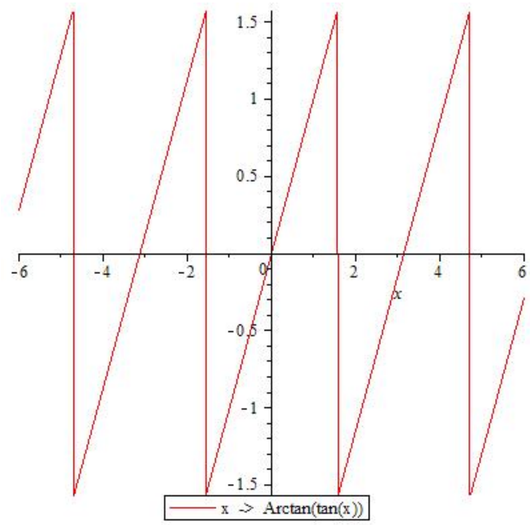
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \tan(\text{Arctan}(x)) = x$$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (là où $\tan(x)$ existe), et on sait que par définition :

$$\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

Remarquons que de plus, la fonction g est impaire (car tan et Arctan le sont), et g est π-périodique (car tan l'est). On en déduit le graphe de g :





2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $y = \text{Arctan}(x)$ (on a donc $\tan(y) = x$). Alors :

$$\frac{\sin(y)}{\cos(y)} = x \Longrightarrow \sin(y) = x\cos(y) \Longrightarrow \sin^2(y) = x^2\cos^2(y) \Longrightarrow 1 - \cos^2(y) = x^2\cos^2(y) \Longrightarrow \cos^2(y) = \frac{1}{1+x^2}$$

Or, $y = \text{Arctan}(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc $\cos(y) > 0$. Ainsi, $\boxed{\cos(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

De la même manière, on obtient $\sin^2(y) = x^2(1 - \sin^2(y)) \Longrightarrow \sin^2(y) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Enfin, puisque $\sin(y)$ est du même signe que x, on en déduit : $\boxed{\sin(y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$.

3. Notons $\alpha = \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)$. Alors $\tan(\alpha) = \dfrac{2+3}{1-2\times 3} = \dfrac{5}{-5} = -1$. Ainsi, $\tan(\alpha) = -1$.

Donc il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi$. Or, $0 \leqslant \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, donc nécessairement $k = 1$ et $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$.

16 Montrer qu'une fonction périodique et monotone sur $\mathbb{R}$ est constante.

Supposons que f soit T-périodique ($T > 0$), et par exemple croissante sur $\mathbb{R}$.

Prenons $a \in \mathbb{R}$ quelconque, alors $f(a) = f(a+T)$ par périodicité.
Or, f étant croissante sur $[a, a+T]$, on a :

$$\forall x \in [a, a+T], \qquad a \leqslant x \leqslant a+T \Longrightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(a+T) \Longrightarrow f(x) = f(a)$$

Ainsi, f est constante sur l'intervalle $[a, a+T]$, donc puisque f est constante sur toute la période, f est constante sur $\mathbb{R}$.

17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante sur $\mathbb{R}$ et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.
Supposons qu'on ait $f(a) \leqslant f(b)$. Alors, puisque $f \circ f$ est croissante, on aurait $f \circ f(f(a)) \leqslant f \circ f(f(b))$, soit $f \circ f \circ f(a) \leqslant f \circ f \circ f(b)$. Or, $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, puisque $a < b$, on devrait avoir $f \circ f \circ f(a) > f \circ f \circ f(b)$: on arrive à une contradiction.
Ainsi l'hypothèse $f(a) \leqslant f(b)$ était nécessairement fausse ! On a donc obligatoirement $f(a) > f(b)$.
On a donc montré que si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. Autrement dit, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

18 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

1. La composée de deux applications injectives est injective.
   Soit $f : E \to F$ injective et soit $g : F \to G$ injective.
   Montrons que $g \circ f : E \to G$ est injective.
   Soient $x, x' \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Alors
   $$g \circ f(x) = g \circ f(x') \Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \overset{g \text{ inj}}{\Longrightarrow} f(x) = f(x') \overset{f \text{ inj}}{\Longrightarrow} x = x'$$
   Donc $g \circ f$ est bien injective.

2. La composée de deux applications surjectives est surjective.
   Soit $f : E \to F$ surjective et soit $g : F \to G$ surjective.
   Montrons que $g \circ f : E \to G$ est surjective.
   Soit $z \in G$. Puisque g est surjective, $\exists y \in F$ tel que $z = g(y)$. Or, f est surjective, donc puisque $y \in F$, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$.
   Donc $g \circ f$ est bien surjective.

19 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ injective et f surjective, alors g injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ surjective et g injective, alors f surjective.

1. Supposons $g \circ f : E \to G$ injective.
   Montrons que f est injective.
   Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
   $$f(x) = f(x') \Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Longrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \overset{g\circ f \text{ inj}}{\Longrightarrow} x = x'$$
   Donc $g \circ f$ est injective.
2. Supposons $g \circ f$ surjective.
   Montrons que g est surjective.
   On sait que $\forall z \in G$, $\exists x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$. On a écrit $z = g(y)$ avec $y = f(x) \in F$.
   Donc g est surjective.
3. Supposons $g \circ f : E \to G$ injective et f surjective.
   Montrons que g est injective.
   Soient $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$.
   Puisque f est surjective, $\exists x \in E \ / \ y = f(x)$ et $\exists x' \in E \ / \ y' = f(x')$. Donc
   $$g(y) = g(y') \Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Longrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \overset{g\circ f \text{ inj}}{\Longrightarrow} x = x' \Longrightarrow f(x) = f(x') \Longrightarrow y = y'$$
   Donc g est bien injective.
4. Supposons $g \circ f : E \to G$ surjective et g injective.
   Montrons que f est surjective.
   Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$. Or, $g \circ f$ surjective. Donc $\exists x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x)$. Ainsi
   $$g(y) = g \circ f(x) \Longrightarrow g(y) = g(f(x)) \overset{g \text{ inj}}{\Longrightarrow} y = f(x)$$
   et donc on a écrit $y = f(x)$ avec $x \in E$. Donc f est bien surjective.