1 Généralités sur les fonctions

$\boxed{1}$ Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+3x+1}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2-4}}$
3. $h : x \mapsto \ln(\ln(|x|))$
4. $v : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$
5. $u : x \mapsto \ln^3(x)$
6. $w : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
7. $z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$

$\boxed{2}$ Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.
Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f, puis montrer que f est impaire sur D_f.

$\boxed{3}$ Étudier les axes et centres de symétrie des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2-5x-7}{x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \qquad f_3(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-x-1}, \qquad f_4(x) = \frac{5x+7}{3x-2}$$

$\boxed{4}$ Pour chaque fonction suivante, déterminer le domaine de définition, puis étudier ses variations sans dériver en étudiant une composition de fonctions monotones.

1. $f : x \mapsto e^{-\sqrt{2-x}}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(e^{-x}-1)}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{1-\ln(1+x)}$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-e^{2-x}}}$
5. $f : x \mapsto (\ln(e^{-x}+1))^2$
6. $f : x \mapsto \sqrt{e^{2+x}-1}$

2 Tracé de courbes

$\boxed{5}$ Tracer les courbes représentatives des fonctions :
$f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \ln(x+1)$, $h(x) = \ln(x)+1$, $u(x) = -\ln(x)$, $v(x) = \ln(-x)$, $w(x) = |\ln(x)|$, $y(x) = \ln(|x|)$

$\boxed{6}$ Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{x+1}, \quad h(x) = e^x+1, \quad u(x) = -e^x \quad v(x) = e^{-x}, \quad w(x) = e^{|x|}, \quad y(x) = e^{-|x|}$$

$\boxed{7}$ Tracer le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,4]$. En déduire comment tracer le graphe des fonctions : $x \mapsto f(x)+3$, $\quad x \mapsto f(x+3)$, $\quad f(2x)$, $\quad 2f(x)$.

$\boxed{8}$ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de période 1, et vérifie : pour tout réel x de $[1,2[$, $f(x) = \ln(x)$. Tracer la courbe représentative de la fonction f et déterminer l'expression de f sur l'intervalle $[-1,0[$

3 Majoration, minoration

$\boxed{9}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Justifier que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{10}$ Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{x}{1+x}$.

1. Sur $[0,+\infty[$ la fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
2. Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$. Déterminer ses bornes inférieures et supérieures.

4 Images et antécédents

11 1. Déterminer les images directes suivantes : $\exp(\mathbb{R})$, $\ln(]0,+\infty[)$, $\sin\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\right)$, $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\right)$.

2. Déterminer les images réciproques suivantes : $\exp^{-1}([-1,1])$, $\ln^{-1}(]1,2])$, $\sin^{-1}([-1,1])$, $\cos^{-1}(\mathbb{N})$

12 Pour chaque fonction, pour tout y dans l'ensemble d'arrivée, déterminer le nombre d'antécédent(s) de y :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & 2x^2+3x+4\end{array},\qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\setminus\{1/2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{4x+5}{6x-3}\end{array},\qquad h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{-1\}\\ x & \longmapsto & \dfrac{1+x}{1-x}\end{array}$$

13 Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\end{array}$.

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
2. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

14 Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^2}\end{array}$

1. Déterminer les images réciproques $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que la restriction g de f à $]1,+\infty[$ est bijective de $]1,+\infty[$ vers $]0,1/2[$, et déterminer g^{-1}.

15 1. Étudier et tracer les courbes représentatives de $f:x\mapsto\tan(\mathrm{Arctan}(x))$ et $g:x\mapsto\mathrm{Arctan}(\tan(x))$.

2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad \cos(\mathrm{Arctan}(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\mathrm{Arctan}(x))=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Montrer que $\mathrm{Arctan}(2)+\mathrm{Arctan}(3)=\dfrac{3\pi}{4}$.

5 Exercices plus théoriques

16 Montrer qu'une fonction périodique et monotone sur $\mathbb{R}$ est constante.

17 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $f\circ f$ soit croissante sur $\mathbb{R}$ et $f\circ f\circ f$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

18 Soient $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux fonctions.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g\circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g\circ f$ est surjective.

19 Soient $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux fonctions.

1. Montrer que si $g\circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g\circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que si $g\circ f$ injective et f surjective, alors g injective.
4. Montrer que si $g\circ f$ surjective et g injective, alors f surjective.