02.1 Soient a, b deux réels strictement positifs. On note : $m = \dfrac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad h = \dfrac{2ab}{a+b}$.
Ranger les trois nombres m, g, h dans l'ordre croissant.

Soient $a, b \in]0, +\infty[$, et $m = \dfrac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

$$\begin{aligned} m \geqslant g &\iff \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \\ &\iff a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \\ &\iff (a+b)^2 \geqslant 4ab \quad \text{(car tout est positif)} \\ &\iff a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab \\ &\iff a^2-2ab+b^2 \geqslant 0 \\ &\iff (a-b)^2 \geqslant 0 \ : \quad \text{toujours vrai} \end{aligned}$$

Ainsi : on a $\boxed{m \geqslant g}$.

$$\begin{aligned} g \geqslant h &\iff \sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b} \\ &\iff a+b \geqslant 2\frac{ab}{\sqrt{ab}} \\ &\iff a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \ : \quad \text{toujours vrai (équivalent à } m \geqslant g) \end{aligned}$$

Ainsi : on a $\boxed{g \geqslant h}$.
Finalement, on a :

$$\boxed{h \leqslant g \leqslant m}$$

Remarquons qu'on pouvait aussi montrer que $m \geqslant h$ (même si les deux inégalités précédentes le montrent aussi par transitivité) :

$$\begin{aligned} m \geqslant h &\iff \frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2ab}{a+b} \\ &\iff (a+b)^2 \geqslant 4ab \ : \quad \text{toujours vrai (équivalent à } m \geqslant g) \end{aligned}$$

Et donc on a bien $\boxed{m \geqslant h}$.

02.2 Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \ ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$
2. $\forall a, b \in]0, +\infty[\ : \ \dfrac{1}{2}\left(\ln(a) + \ln(b)\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
3. $\forall a, b \in]0, +\infty[\ : \ \dfrac{a^2}{a+b} \geqslant \dfrac{3a-b}{4}$

1. Pour tous réels a et b, on a :

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \iff 2ab \leqslant a^2 + b^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \iff (a-b)^2 \geqslant 0 \ : \quad \text{toujours vrai}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

2. Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\frac{1}{2}\left(\ln(a) + \ln(b)\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \iff \frac{1}{2}\ln(ab) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln\left((ab)^{1/2}\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \iff \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \ : \quad \text{vrai (exo 1)}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\ln(a) + \ln(b)\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

3. Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{3a-b}{4} \iff 4a^2 \geqslant (3a-b)(a+b) \iff 4a^2 \geqslant 3a^2 + 2ab - b^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \iff (a-b)^2 \geqslant 0 \ : \quad \text{vrai}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{3a-b}{4}}$$

02.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x| = 5$
2. $|x| \leqslant 2$
3. $|x| > 4$
4. $|x-3| = \dfrac{5}{3}$
5. $|x+2| = \dfrac{1}{2}$
6. $|2x+3| - |2-x| = -3$
7. $|x+1| - |2x+1| = 0$
8. $x - 2 = \sqrt{x}$
9. $|2x-1| \leqslant |x+2|$
10. $|x+3| - 2|x-1| > 2$
11. $|2x+1| \leqslant |x+2| + 2x$
12. $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$.
13. $x + 1 \leqslant \sqrt{x+2}$
14. $|x^2 - 3| > 2$.

1. $|x| = 5 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\pm 5\}}$$

2. $|x| \leqslant 2 \Longleftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$

$$\boxed{\mathcal{S} = [-2, 2]}$$

3. $|x| > 4 \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \text{ou} \\ x < -4 \end{cases}$

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[}$$

4. $|x-3| = \dfrac{5}{3} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 3 = \dfrac{5}{3} \\ \text{ou} \\ 3 - x = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right\}}$$

5. $|x+2| = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x + 2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3}{2} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-3}{2}, \frac{-5}{2}\right\}}$$

6. $|2x+3| - |2-x| = -3$?
   Cherchons déjà à simplifier l'expression $|2x+3| - |2-x|$ en fonction du réel x.

x	$-\infty$	$-3/2$	2	$+\infty$
$\|2x+3\|$	$-2x-3$	0 $2x+3$		$2x+3$
$\|2-x\|$	$2-x$	$2-x$	0	$x-2$
$\|2x+3\| - \|2-x\|$	$-x-5$	$3x+1$		$x+5$

- **1er cas :** sur $]-\infty, -3/2]$, alors :

$$|2x+3| - |2-x| = -3 \iff -x-5 = -3 \iff x = -2$$

$\mathcal{S}_1 = \{-2\}$

- **2ème cas :** sur $[-3/2, 2]$, alors :

$$|2x+3| - |2-x| = -3 \iff 3x+1 = -3 \iff x = -\frac{4}{3}$$

$\mathcal{S}_2 = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

- **3ème cas :** sur $[2, +\infty[$, alors :

$$|2x+3| - |2-x| = -3 \iff x+5 = -3 \iff x = -8 \notin [2, +\infty[$$

$\mathcal{S}_3 = \emptyset$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-2, \frac{-4}{3}\right\}}$$

7. $|x+1| - |2x+1| = 0 \iff |x+1| = |2x+1| \iff \begin{cases} x+1 = 2x+1 \\ \text{ou} \\ x+1 = -(2x+1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}}$$

8. $x - 2 = \sqrt{x}$.
L'équation a un sens si et seulement si $x \geqslant 0$. <u>On résout donc sur $[0, +\infty[$.</u>
ATTENTION : on ne peut pas élever au carré, car les signes peuvent être différents (le signe du membre de gauche est incertain).

- Sur $[2, +\infty[$,

$$x - 2 = \sqrt{x} \iff (x-2)^2 = x \iff x^2 - 4x + 4 = x \iff x^2 - 3x + 4 = 0 \iff \underbrace{x = -1}_{\text{impossible}} \text{ ou } x = 4$$

$\mathcal{S}_1 = \{4\}$.

- Sur $[0, 2[$,

$$x - 2 = \sqrt{x} \ : \ \text{impossible (« négatif=positif »)}$$

$\mathcal{S}_2 = \emptyset$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\}}$$

9. $|2x-1| \leqslant |x+2| \iff |2x-1| - |x+2| \leqslant 0$.

x	$-\infty$		-2		$1/2$		$+\infty$
$\|2x-1\|$		$1-2x$		$1-2x$	0	$2x-1$	
$\|x+2\|$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$	
$\|2x-1\| - \|x+2\|$		$-x+3$		$-3x-1$		$x-3$	

- **1er cas :** sur $]-\infty, -2]$, alors :

$$|2x-1| - |x+2| \leqslant 0 \Longleftrightarrow -x+3 \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 3 \text{ : faux sur cet intervalle}$$

$\mathcal{S}_1 = \emptyset$

- **2ème cas :** sur $[-2, 1/2]$, alors :

$$|2x-1| - |x+2| \leqslant 0 \Longleftrightarrow -3x-1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant \frac{-1}{3}$$

$\mathcal{S}_2 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

- **3ème cas :** sur $[1/2, +\infty[$, alors :

$$|2x-1| - |x+2| \leqslant 0 \Longleftrightarrow x-3 \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant 3$$

$\mathcal{S}_3 = \left[\frac{1}{2}, 3\right]$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{3}, 3\right]}$$

10. $|x+3| - 2|x-1| > 2$?

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$\lvert x+3\rvert$		$-x-3$	0	$x+3$		$x+3$	
$\lvert x-1\rvert$		$1-x$		$1-x$	0	$x-1$	
$\lvert x+3\rvert-2\lvert x-1\rvert$		$x-5$		$3x+1$		$-x+5$	

- **1er cas :** sur $]-\infty, -3]$, alors :

$$|x+3| - 2|x-1| > 2 \Longleftrightarrow x-5 > 2 \Longleftrightarrow x > 7 \text{ : faux sur cet intervalle}$$

$\mathcal{S}_1 = \emptyset$

- **2ème cas :** sur $[-3, 1]$, alors :

$$|x+3| - 2|x-1| > 2 \Longleftrightarrow 3x+1 > 2 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

$\mathcal{S}_2 = \left]\frac{1}{3}, 1\right]$

- **3ème cas :** sur $[1, +\infty[$, alors :

$$|x+3| - 2|x-1| > 2 \Longleftrightarrow -x+5 > 2 \Longleftrightarrow x < 3$$

$\mathcal{S}_3 = [1, 3[$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{1}{3}, 3\right[}$$

11. $|2x+1| \leqslant |x+2| + 2x \iff |2x+1| - |x+2| \leqslant 2x$

x	$-\infty$ -2	$-1/2$	$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$	$-2x-1$ 0	$2x+1$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$ 0	$x+2$	$x+2$
$\lvert 2x+1\rvert - \lvert x+2\rvert$	$-x+1$	$-3x-3$	$x-1$

- **1er cas :** sur $]-\infty, -2]$, alors :

$$|2x+1| - |x+2| \leqslant 2x \iff -x+1 \leqslant 2x \iff x \geqslant \frac{1}{3} \text{ : faux sur cet intervalle}$$

  $\mathcal{S}_1 = \emptyset$

- **2ème cas :** sur $[-2, -1/2]$, alors :

$$|2x+1| - |x+2| \leqslant 2x \iff -3x-3 \leqslant 2x \iff x \geqslant \frac{-3}{5}$$

  $\mathcal{S}_2 = \left[\frac{-3}{5}, -\frac{1}{2}\right]$

- **3ème cas :** sur $[-1/2, +\infty[$, alors :

$$|2x+1| - |x+2| \leqslant 2x \iff x-1 \leqslant 2x \iff x \geqslant -1 \text{ : toujours vrai}$$

  $\mathcal{S}_3 = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{-3}{5}, +\infty\right[}$$

12. $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$.

L'inéquation a un sens si et seulement si $x+1 \neq 0$, autrement dit si et seulement si $x \neq -1$.
<u>On résout donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.</u>

- **1er cas :** Sur $]-\infty, -1[$, alors : $|x+2| \geqslant 0$ et $\dfrac{1-x}{1+x} < 0$, donc l'inégalité est toujours vraie.
  Ainsi, $\mathcal{S}_1 =]-\infty, -1[$.
- **2ème cas :** Sur $[1, +\infty[$, alors : $|x+2| \geqslant 0$ et $\dfrac{1-x}{1+x} < 0$, donc l'inégalité est toujours vraie.
  Ainsi, $\mathcal{S}_2 = [1, +\infty[$.
- **3ème cas :** Sur $]-1, 1[$, alors : $|x+2| = x+2 \geqslant 0$ et on a $1+x > 0$, donc :

$$|x+2| \geqslant \frac{1-x}{1+x} \iff x+2 \geqslant \frac{1-x}{1+x} \iff (x+2)(1+x) \geqslant 1-x \iff x^2+4x+1 \geqslant 0$$
$$\iff x \in]-\infty, -2-\sqrt{3}] \cup [-2+\sqrt{3}, +\infty[$$

  Ainsi, $\mathcal{S}_3 = [-2+\sqrt{3}, 1]$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup [-2+\sqrt{3}, +\infty[}$$

13. $x+1 \leqslant \sqrt{x+2}$

    L'inéquation a un sens si et seulement si $x+2 \geqslant 0$. On résout donc sur $[-2,+\infty[$.

    - **1er cas :** Sur $[-2,-1[$, alors : $x+1 \leqslant 0$ et $\sqrt{x+2} \geqslant 0$, donc l'inéquation est toujours vraie sur cet intervalle.
    - **2ème cas :** Sur $[-1,+\infty[$, alors : $x+1 \geqslant 0$ et $\sqrt{x+2} \geqslant 0$, donc

    $$x+1 \leqslant \sqrt{x+2} \iff (x+1)^2 \leqslant x+2 \iff x^2+2x+1 \leqslant x+2 \iff x^2+x-1 \leqslant 0$$

    $$\iff x \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

    Ainsi :

    $$\boxed{\mathcal{S} = \left[-2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]}$$

14. $|x^2-3| > 2$.

    - **1er cas :** Sur $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$, alors : $3-x^2 > 0$, donc :

    $$|x^2-3| > 2 \iff 3-x^2 > 2 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$$

    - **2ème cas :** Sur $[-\infty,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$, alors :

    $$|x^2-3| > 2 \iff x^2-3 > 2 \iff x^2 > 5 \iff \begin{cases} x > \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x < -\sqrt{5} \end{cases}$$

    Ainsi :

    $$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,-\sqrt{5}[\cup]-1,1[\cup]\sqrt{5},+\infty[}$$

02.4 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 \geqslant |x - 1|$.

- **1er cas :** Sur $[1, +\infty[$, alors :

  $x^2 - x + 1 \geqslant |x-1| \Longleftrightarrow x^2 - x + 1 \geqslant x - 1 \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geqslant -1 \Longleftrightarrow (x-1)^2 \geqslant -1$: toujours vrai

- **2ème cas :** Sur $]-\infty, 1]$, alors :

$$x^2 - x + 1 \geqslant |x-1| \Longleftrightarrow x^2 - x + 1 \geqslant 1 - x \Longleftrightarrow x^2 \geqslant 0 \ : \quad \text{toujours vrai}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|}$$

02.5 Soient x et y des réels tels que $0 \leqslant x \leqslant y$. Montrer que : $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant y$.

$$0 \leqslant x \leqslant y \Longrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant xy$$

et

$$0 \leqslant x \leqslant y \Longrightarrow 0 \leqslant xy \leqslant y^2$$

Donc :

$$0 \leqslant x^2 \leqslant xy \leqslant y^2$$

et donc :

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant y$$

02.6 Soient a et b deux réels positifs.

1. Montrer que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. En déduire que : $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

L'idée dans cet exercice est de s'inspirer de la démonstration de l'inégalité triangulaire.

1. $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ étant positifs, les comparer revient à comparer leur carré.

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} \iff a + b \leqslant a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \iff 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0 \ : \quad \text{toujours vrai}$$

   Donc on a bien :

$$\boxed{\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

2. Remarquons que, dans l'inégalité qu'on veut montrer, on peut permuter a et b, donc on peut toujours supposer que $a \leqslant b$, quitte à permuter les deux nombres.

   Prenons donc $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ tels que $b - a \geqslant 0$. Alors :

$$\sqrt{b} = \sqrt{a + (b-a)} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b-a}$$

   et donc :

$$\boxed{\sqrt{b} - \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b-a} = \sqrt{|a-b|}}$$

   De plus, puisqu'on a supposé $a \leqslant b$, on a $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leqslant 0$, donc on a aussi :

$$\boxed{\sqrt{a} - \sqrt{b} \leqslant 0 \leqslant \sqrt{|a-b|}}$$

   Finalement, on a donc :

$$\boxed{\max(\sqrt{a} - \sqrt{b}, \sqrt{b} - \sqrt{a}) \leqslant \sqrt{|a-b|}}$$

   autrement dit :

$$\boxed{|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}}$$

02.7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 2 = 0$
2. $6x^2 - x - 1 = 0$
3. $x^4 - 2x^2 - 2 = 0.$
4. $2x^6 - 5x^3 + 1 = 0$
5. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$
6. $x^9 - 1 = 0$
7. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$
8. $2x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0$

1. $x^2 + 3x + 2 = 0 \iff (x+1)(x+2) = 0 \iff x = -1$ ou $x = -2$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1, -2\}}$$

2. $6x^2 - x - 1 = 0 \overset{\Delta=25}{\iff} x = \dfrac{1 \pm 5}{12} \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}}$$

3. En posant $X = x^2$, on a

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 - 2 = 0 &\iff X^2 - 2X - 2 = 0 \\ &\overset{\Delta=12}{\iff} X = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &\iff X = 1 \pm \sqrt{3} \\ &\iff x^2 = 1 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x^2 = 1 - \sqrt{3}}_{\text{impossible dans } \mathbb{R}} \\ &\iff x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\pm\sqrt{1 + \sqrt{3}}\right\}}$$

4. En posant $X = x^3$, on a :

$$\begin{aligned} 2x^6 - 5x^3 + 1 = 0 &\iff 2X^2 - 5X + 1 = 0 \\ &\overset{\Delta=17}{\iff} X = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \\ &\iff x^3 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } x^3 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ &\iff x = \sqrt[3]{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}} \text{ ou } x = \sqrt[3]{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}\right)^{1/3}\right\}}$$

5. On remarque que 1 est solution évidente de l'équation. En factorisant par $x-1$, on obtient :

$$x^3-3x^2-13x+15=0 \iff (x-1)(x^2-2x-15)=0 \iff (x-1)(x+3)(x-5)=0 \iff x=1 \text{ ou } x=-3 \text{ ou } x=5$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{1;-3;5\}}$$

6. $x^9-1=0 \iff x^9=1 \iff x=\sqrt[9]{1} \iff x=1$.

$$\boxed{\mathcal{S}=\{1\}}$$

7. On remarque que 1 est solution évidente de l'équation. En factorisant par $x-1$ on obtient :

$$x^3-2x^2+2x-1=0 \iff (x-1)(x^2-x+1)=0$$

Or x^2-x+1 a pour discriminant $\Delta=-3<0$, donc est toujours strictement positif. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{S}=\{1\}}$$

8. On remarque que -1 est solution évidente de l'équation. En factorisant par $x+1$, on obtient :

$$2x^3+4x^2+x-1=(x+1)(2x^2+2x-1)$$

Or, $2x^2+2x-1$ a pour discriminant $\Delta=12$, donc a pour racines $\dfrac{-2\pm\sqrt{12}}{4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-1;\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

02.8 Résoudre les inéquations suivantes après avoir précisé leur domaine de validité :

1. $\dfrac{2+x}{1-x} \leqslant 2$.
2. $\dfrac{x+1}{x^2-3} \leqslant -3$.
3. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2} \leqslant 3$.
4. $4x^3-8x^2-47x+105<0$
5. $\dfrac{5x+2}{6x-1} \geqslant \dfrac{2x+9}{5x+10}$

1. On résout sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\frac{2+x}{1-x} \leqslant 2 \Longleftrightarrow \frac{(2+x)-2(1-x)}{1-x} \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{3x}{1-x} \leqslant 0$$

On fait un tableau de signes:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	

$$\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,0]\cup]1,+\infty[}$$

2. On résout sur $\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$.

$$\frac{x+1}{x^2-3} \leqslant -3 \Longleftrightarrow \frac{x+1+3(x^2-3)}{x^2-3} \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{3x^2+x-8}{x^2-3} \leqslant 0$$

On a: $x^2-3 \leqslant 0 \Longleftrightarrow -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ et $3x^2+x-8 \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{-1-\sqrt{97}}{6} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{97}}{6}$.
Remarquons que :

$$\frac{-1-\sqrt{97}}{6} < -\sqrt{3} < \frac{-1+\sqrt{97}}{6} < \sqrt{3}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{97}}{6}$		$-\sqrt{3}$		$\frac{-1+\sqrt{97}}{6}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+x-8$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left[\frac{-1-\sqrt{97}}{6};-\sqrt{3}\right[\cup\left[\frac{-1+\sqrt{97}}{6};\sqrt{3}\right[}$$

3. On résout sur $[1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2} \leqslant 3 &\Longleftrightarrow (x-1)+2\sqrt{(x-1)(x+2)}+(x+2) \leqslant 9\\ &\Longleftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x+2)} \leqslant 8-2x\\ &\Longleftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+2)} \leqslant 4-x\end{aligned}$$

1er cas : Si $4-x<0$ (c'est-à-dire $x>4$), alors l'inéquation est impossible (on a « négatif $\leqslant$ positif »).
2ème cas : Si $4-x \geqslant 0$ (c'est-à-dire $x \leqslant 4$), alors :

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} \leqslant 4-x \Longleftrightarrow (x-1)(x+2) \leqslant (4-x)^2 \Longleftrightarrow x^2+x-2 \leqslant 16-8x+x^2 \Longleftrightarrow 9x \leqslant 18 \Longleftrightarrow x \leqslant 2$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S}=[1;2]}$$

4. 3 est une racine du polynôme. On peut donc factoriser par $x-3$, on a :

$$4x^3 - 8x^2 - 47x + 105 = (x-3)(4x^2+4x-35)$$

Le polynôme $4x^2+4x-35$ a un discriminant $\Delta = 16+16\times 35 = 16\times 36 = 4^2\times 6^2 = (24)^2$.
Les racines sont donc $\dfrac{-4+24}{8} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{-4-24}{8} = \dfrac{-7}{2}$. On sait donc que :

$$4x^2+4x-35 < 0 \Longleftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2}$$

On fait alors un tableau de signes.

x	$-\infty$		$-7/2$		$5/2$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$4x^2+4x-35$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty;\frac{-7}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2},3\right[}$$

5. On résout sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{6};-2\right\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{5x+2}{6x-1} \geqslant \frac{2x+9}{5x+10} & \\
&\Longleftrightarrow \frac{5x+2}{6x-1} - \frac{2x+9}{5x+10} \geqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{(5x+2)(5x+10)-(2x+9)(6x-1)}{(6x-1)(5x+10)} \geqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{13x^2+8x+29}{(6x-1)(5x+10)} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Le polynôme $13x^2+8x+29$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 4\times 13\times 29 < 0$, donc est toujours positif. Le signe ne dépend donc que du dénominateur, qui est déjà factorisé, donc du signe positif à l'extérieur des racines :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;-2[\cup \left]\frac{1}{6};+\infty\right[}$$

02.9 Résoudre les équations suivantes :

1. $2^{x^2} = 3^{x^3}$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
3. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$
4. $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$ avec $a > 0$, $a \neq 1$.
5. $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$.

1. On résout sur $\mathbb{R}$

$$2^{x^2} = 3^{x^2} \iff x^2 \ln(2) = x^3 \ln(3) \iff x^2(\ln(2) - x\ln(3)) = 0 \iff x^2 = 0 \quad \text{ou} \;\; \ln(2) - x\ln(3) = 0$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{0; \frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right\}}$$

2. On résout sur $\mathbb{R}^+$.

   - Pour $x = 0$, l'équation est bien vérifiée puisque $0^{\sqrt{0}} = 1 = (\sqrt{0})^0$. Ainsi, 0 est solution.
   - Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x &\iff \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) \\ &\iff \sqrt{x}\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x) = 0 \\ &\iff \sqrt{x}\ln(x)\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 0 \\ &\iff \underbrace{\sqrt{x} = 0}_{\text{impossible}} \;\text{ ou }\; \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0; 1; 4\}}$$

3. On résout sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2} &\iff 2^{x+4} - 2^{x+2} = 3^{x+2} - 3^x \\ &\iff 3 \times 2^{x+2} = 8 \times 3^x \\ &\iff 2^{x-1} = 3^{x-1} \\ &\iff (x-1)\ln(2) = (x-1)\ln(3) \\ &\iff x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$$

4. On résout sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ ($\ln(x)$ a un sens uniquement si $x>0$, et $\ln(x)\neq 0 \Longleftrightarrow x\neq 1$).

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)} &\Longleftrightarrow (\ln(x))^2 = (\ln(a))^2 \\
&\Longleftrightarrow \ln(x) = \ln(a) \ \text{ ou } \ \ln(x) = -\ln(a) \\
&\Longleftrightarrow \ln(x) = \ln(a) \ \text{ ou } \ \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\
&\Longleftrightarrow x = a \ \text{ ou } x = \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{a; \frac{1}{a}\right\}}$$

5. On résout sur $]1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\ln(x-1)+\ln(x+1) < 2\ln(x)-1 &\Longleftrightarrow \ln((x-1)(x+1)) < \ln\left(\frac{x^2}{e}\right) \\
&\Longleftrightarrow x^2-1 < \frac{x^2}{e} \\
&\Longleftrightarrow x^2 < \frac{e}{e-1} \\
&\Longleftrightarrow -\sqrt{\frac{e}{e-1}} < 1 < x < \sqrt{\frac{e}{e-1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]1; \sqrt{\frac{e}{e-1}}\right[}$$

02.10 Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Montrer que :

1. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.
2. $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$
3. $a+\frac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{b}$.

1. Soient a, b strictement positifs.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4 \iff \frac{(a+b)^2}{ab} \geqslant 4 \iff a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab \iff a^2-2ab+b^2 \geqslant 0 \iff (a-b)^2 \geqslant 0 \ : \ \text{VRAI}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4}$$

2. Remarquons que pour tous réels positifs x et y :

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x-2\sqrt{xy}+y \geqslant 0 \iff x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$$

On peut donc écrire que, pour a, b, c strictement positifs :

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \qquad b+c \geqslant 2\sqrt{bc}, \qquad c+a \geqslant 2\sqrt{ca}$$

En multipliant ces trois inégalités (tout est bien positif),

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 2\sqrt{ab}2\sqrt{bc}2\sqrt{ca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

Ainsi :

$$\boxed{(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc}$$

3. Soient a, b strictement positifs.

$$a+\frac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{b} \iff \frac{a^2+b-2\sqrt{b}a}{a} \geqslant 0 \iff a^2-2a\sqrt{b}+b \geqslant 0 \iff (a-\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \ : \ \text{VRAI}$$

Ainsi :

$$\boxed{a+\frac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{b}}$$

02.11

Montrer pour tous réels x et y, et pour tout entier n, on a :

$$|x+y|^n \leqslant 2^n(|x|^n + |y|^n)$$

Soient x et y deux réels.
Notons $z = \max(|x|, |y|)$.
Par définition, on a $|x| \leqslant z$, et $|y| \leqslant z$.
De plus, pour tout $n \geqslant 0$, $z^n \leqslant |x|^n + |y|^n$ (puisque $|z|^n$ est nécessairement l'une des valeurs $|x|^n$ ou $|y|^n$, l'autre étant positive).
On peut donc dire que :

$$|x+y|^n = \Big(|x+y|\Big)^n \overset{I.T.}{\leqslant} \Big(|x|+|y|\Big)^n \leqslant \Big(z+z\Big)^n = (2z)^n = 2^n \times z^n \leqslant 2^n(|x|^n + |y|^n)$$

02.12 Pour les parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer les bornes inférieures et supérieures si elles existent, et le maximum et minimum s'ils existent.

1. $A = \left\{2 - \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. $B = \left\{1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m},\ n, m \in \mathbb{Z}^*\right\}$
3. $C = \left\{1 - \dfrac{1}{n-m},\ n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m\right\}$
4. $D = \left\{\dfrac{pq}{p^2+q^2},\ p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$
5. $E = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

1. Puisque :
$$\forall n \geqslant 1,\ 2 - \frac{1}{n} \geqslant 1$$
et que $1 \in A$, on a donc $\inf(A) = \min(A) = 1$. De plus,
$$\forall n \geqslant 1,\ 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$
et que la suite d'éléments de A $\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ se rapproche de 2 lorsque $n \to +\infty$, alors $sup(A) = 2$, mais 2 n'étant jamais atteint, A n'admet pas de maximum.
2. Puisque :
$$\forall n, m \in \mathbb{Z}^*, \quad -1 = 1 - 1 - 1 \leqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leqslant 3$$
et que $-1 \in B$ et $3 \in B$, on a $\inf(B) = \min(B) = -1$ et $\sup(B) = \max(B) = 3$.
3. Puisque :
$$\forall n, m \in \mathbb{Z}^* \text{ avec } n \neq m, \qquad 0 \leqslant 1 - \frac{1}{n-m} \leqslant 2$$
et que $0 \in C$ et $2 \in C$, on a $\inf(C) = \min(C) = 0$ et $\sup(C) = \max(C) = 2$.
4. On sait que $(p-q)^2 \geqslant 0$, donc on en déduit que :
$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{pq}{p^2+q} \leqslant \frac{1}{2}$$
On en déduit que D est majorée, et comme $1/2 \in D$, on a $\sup(D) = \max(D) = 1/2$.
De plus, 0 minore clairement D, et la suite d'élément de D : $\left(\frac{n \times 1}{n^2+1}\right)$ se rapproche de 0 lorsque $n \to +\infty$, alors $\inf(D) = 0$ mais 0 n'étant jamais atteint, D n'admet pas de minimum.
5. On a clairement que :
$$\forall n \geqslant 1,\ -1 \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant 1$$
L'ensemble E est donc minoré et majoré, il admet donc borne supérieure et inférieure. Remarquons que plus précisément, on a :
$$\forall n \geqslant 1,\ -1 \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{2}$$
donc $\inf(E) = \min(E) = -1$ et $\sup(E) = \max(E) = \dfrac{1}{2}$.

02.13 Déterminer les ensembles :

$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1, \frac{1}{n}\right], \qquad J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[, \qquad K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$$

1. $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1, \frac{1}{n}\right] = [-1, 0]$.
2. $J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$
3. $K = \mathbb{R}$

02.14 Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cap J \neq \emptyset$, montrer que $I \cup J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Supposons que I et J soient bien des intervalles.

Prenons $x \in I \cup J$ et $y \in I \cup J$ tels que $x \leqslant y$.
Montrons que pour tout t tel que $x \leqslant t \leqslant y$, on a encore $t \in I \cup J$.

Si $x \in I$ et $y \in I$, alors puisque I est un intervalle, si $x \leqslant t \leqslant y$, alors $t \in I$ aussi.

Si $x \in J$ et $y \in J$, alors puisque J est un intervalle, si $x \leqslant t \leqslant y$, alors $t \in J$ aussi.

Si $x \in I$ et $y \in J$, on sait qu'il existe au moins un $z \in I \cap J$, donc on a nécessairement :

$$x \leqslant z \leqslant y$$

Pour tout t tel que $x \leqslant t \leqslant y$, si $x \leqslant t \leqslant z$, alors $t \in I$ et si $z \leqslant t \leqslant y$, alors $t \in J$.
Ainsi, dans tous les cas, $t \in I \cup J$.
On fait le même raisonnement si $x \in J$ et $y \in I$.