1 Manipulation d'inégalités, équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

1 Soient a, b deux réels strictement positifs. On note : $m = \dfrac{a+b}{2}$, $\quad g = \sqrt{ab}$, $\quad h = \dfrac{2ab}{a+b}$.
Ranger les trois nombres m, g, h dans l'ordre croissant.

2 Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ :\ ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$
2. $\forall a, b \in]0, +\infty[\ :\ \dfrac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leqslant \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
3. $\forall a, b \in]0, +\infty[\ :\ \dfrac{a^2}{a+b} \geqslant \dfrac{3a-b}{4}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x| = 5$
2. $|x| \leqslant 2$
3. $|x| > 4$
4. $|x-3| = \dfrac{5}{3}$
5. $|x+2| = \dfrac{1}{2}$
6. $|2x+3| - |2-x| = -3$
7. $|x+1| - |2x+1| = 0$
8. $x - 2 = \sqrt{x}$
9. $|2x-1| \leqslant |x+2|$
10. $|x+3| - 2|x-1| > 2$
11. $|2x+1| \leqslant |x+2| + 2x$
12. $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$.
13. $x + 1 \leqslant \sqrt{x+2}$
14. $|x^2 - 3| > 2$.

4 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|$.

5 Soient x et y des réels tels que $0 \leqslant x \leqslant y$. Montrer que : $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant y$.

6 Soient a et b deux réels positifs.

1. Montrer que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. En déduire que : $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 2 = 0$
2. $6x^2 - x - 1 = 0$
3. $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$.
4. $2x^6 - 5x^3 + 1 = 0$
5. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$
6. $x^9 - 1 = 0$
7. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$
8. $2x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0$

8 Résoudre les inéquations suivantes après avoir précisé leur domaine de validité :

1. $\dfrac{2+x}{1-x} \leqslant 2$.
2. $\dfrac{x+1}{x^2-3} \leqslant -3$.
3. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \leqslant 3$.
4. $4x^3 - 8x^2 - 47x + 105 < 0$
5. $\dfrac{5x+2}{6x-1} \geqslant \dfrac{2x+9}{5x+10}$

9 Résoudre les équations suivantes :

1. $2^{x^2} = 3^{x^3}$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
3. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$
4. $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$ avec $a > 0$, $a \neq 1$.
5. $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$.

10 Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Montrer que :

1. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$.
2. $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$
3. $a + \dfrac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{b}$.

11 Montrer pour tous réels x et y, et pour tout entier n, on a :

$$|x+y|^n \leqslant 2^n(|x|^n + |y|^n)$$

2 Bornes supérieures et inférieures, intervalles

12 Pour les parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer les bornes inférieures et supérieures si elles existent, et le maximum et minimum s'ils existent.

1. $A = \left\{2 - \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. $B = \left\{1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m},\ n, m \in \mathbb{Z}^*\right\}$
3. $C = \left\{1 - \dfrac{1}{n-m},\ n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m\right\}$
4. $D = \left\{\dfrac{pq}{p^2+q^2},\ p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$
5. $E = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

13 Déterminer les ensembles :

$$I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1, \frac{1}{n}\right], \qquad J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[, \qquad K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$$

14 Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cap J \neq \emptyset$, montrer que $I \cup J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.