1 Soient X et Y indépendantes de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. Déterminer la loi de $Z = X+Y$.

Application : Montrer que pour tout entier k, on a $\displaystyle\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$.

2 Soient X et Y indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de $Z = X+Y$.

3 Soient X et Y indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $Z = X+Y$.

4 Soient X et Y deux variables indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$.
On note $Z = \min(X,Y)$ et $T = \max(X,Y)$. Déterminer la loi de Z et de T.

5 Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{X+1}$.

6 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p, admettant espérance et variance. Calculer la covariance de $U = X+Y$ et $V = X-Y$. U et V sont-elles indépendantes ?

7 Soient X, Y, Z trois variables indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ.
On note $S = X+Y$ et $T = X+Z$.

1. Calculer la covariance de S et T.
2. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

8 On effectue des lancers d'une pièce qui fait Pile avec probabilité p. Soit X le rang d'apparition du r-ième Pile. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

9 Soient X et Y indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$.

1. Déterminer les lois de $S = X+Y$ et $D = X-Y$.
2. Déterminer la loi de (S,D) et calculer $cov(S,D)$.
3. S et D sont-elles indépendantes ?

10 Soient X et Y indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.
Donner la loi de X conditionnellement à l'événement $[X+Y=n]$.

11 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Pour $n \geqslant 0$, on note $Y_n = X_n X_{n+1}$. Reconnaître la loi de Y_n. Calculer alors l'espérance et la variance de $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.

12 En une journée donnée, le nombre aléatoire N de personnes qui vont venir dans un magasin suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On fait une offre promotionnelle : chaque client pourra lancer une pièce équilibrée, s'il obtient Pile, il aura doit à une réduction à la caisse, s'il obtient Face, il paiera le prix normal. On note X le nombre de réductions données durant la journée, et $Y = N - X$ le nombre de clients payant le prix normal durant la journée.

1. Déterminer la loi de X, et la loi de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

$\boxed{13}$ On lance infiniment une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.
On note X_j le rang d'apparition du j-ième Pile.

1. Déterminer la loi de X_1, de X_2, puis de X_j.
2. On note pour $j \geqslant 2$, $Y_j = X_j - X_{j-1}$. Quelle est la loi de Y_j ? En déduire l'espérance et la variance de X_k.

$\boxed{14}$ On dispose de n dés équilibrés à six faces. On souhaite réaliser un maximum de « 6 » avec ces dés, en les lançant trois fois au maximum. On lance donc tous les dés une fois, si certains dés font un 6 on les écarte, on ne relance que les autres, parmi lesquels on peut conserver les dés qui font un 6, puis on ne relance une troisième fois que les dés qui n'ont pas encore fait 6 pour tenter une dernière fois.
On note X le nombre de 6 apparus au premier essai, Y le nombre de 6 apparus au deuxième tour, et Z le nombre de 6 apparus lors du troisième lancer, et on note $S = X + Y + Z$ le nombre de 6 au total réussis sur le jeu.
Donner la loi de X, la loi de Y et la loi de Z. Que vaut $\mathbb{E}[S]$? X, Y, Z sont-elles indépendantes ?

$\boxed{15}$ Soient X et N deux variables aléatoires discrètes. On appelle espérance conditionnelle de X sachant $[N = n]$ (lorsqu'elle existe) :

$$\mathbb{E}[X|N = n] = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k)$$

On admet que lorsque pour tout n de $N(\Omega)$, $\mathbb{E}[X|N = n]$ existe et que la série $\sum_n \mathbb{E}[X|N = n]\mathbb{P}(N = n)$ converge, alors X admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbb{E}[X|N = n]\mathbb{P}(N = n)$$

(Ce résultat s'appelle le Théorème de l'espérance totale).
Exemple d'application: On dispose d'une pièce qui fait Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$. On la lance jusqu'à obtenir le premier Pile (on note le rang du premier pile N), puis on relance la pièce autant de fois et on compte le nombre de Pile sur cette deuxième série de lancers, on note ce nombre X.
Par exemple, si on a obtenu le premier pile au rang 7, on peut relancer la pièce 7 fois et on compte le nombre de Pile sur les 7 lancers. Si on a obtenu le premier pile au rang 16, on relance 16 fois et on compte le nombre de piles sur les 16 lancers.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Que vaut $X(\Omega)$? Préciser $\mathbb{P}(X = 0)$.
3. X et N sont-elles indépendantes ?
4. Montrer que si $n \in \mathbb{N}(\Omega)$, alors $\mathbb{E}[X|N = n] = np$.
5. En utilisant le théorème de l'espérance totale (question 1), montrer que $\mathbb{E}[X] = 1$.

$\boxed{16}$ On considère une succession de lancers pour une pièce équilibrée. Pour tout $i \geqslant 1$, on note $X_i = 1$ lorsque la pièce donne Pile puis Face aux lancers i et $i + 1$, et $X_i = 0$ sinon. On note alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, le nombre de fois où on obtient Pile suivi de Face sur les $n + 1$ premiers lancers.

1. Déterminer la loi de X_i pour tout $i \geqslant 1$.
2. Pour $n \geqslant 1$, calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathbb{V}[S_n]$.
3. Pour $n \geqslant 1$, déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

17 On dispose de n dés équilibrés à six faces qu'on lance une fois. On note alors pour $i \in [\![1,6]\!]$, X_i le nombre de dés ayant donné i. On note également S la somme obtenue par les numéros sur les dés.

1. Quelle est la loi de X_i ? Déterminer $\mathbb{E}[S]$.
2. Que vaut la variance de S ?

18

Un joueur A lance une pièce (qui fait pile avec probabilité $p \in]0,1[$), et si le rang du 1er Pile est égal à une valeur k, alors le joueur A demande au joueur B de choisir un entier au hasard entre 1 et k.
On note X le rang du 1er pile de la pièce lancée par le joueur A, et on note Y le nombre choisi par le joueur B.

1. Déterminer la loi de X, puis la loi de Y.
2. Que vaut l'espérance de Y ?

19 Un joueur A lance une pièce (qui fait pile avec probabilité $p \in]0,1[$), et si le nombre de Face avant le 2ème Pile est égal à une valeur k, alors le joueur A demande au joueur B de choisir un entier au hasard entre 0 et k.
On note X le nombre de Face avant le 2ème Pile de la pièce lancée par le joueur A, et on note Y le nombre choisi par le joueur B.

1. Déterminer la loi de X, puis la loi de Y.
2. Que vaut l'espérance de Y ?

20 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On prélève une poignée « aléatoire » de jetons. On note N le nombre de jetons obtenus, S la somme des points des jetons de la poignée. Si la poignée est vide, on note $S = 0$.

1. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.
   (a) Déterminer la loi de N et donner son espérance.
   (b) Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $X_k = 1$ si la poignée contient le jeton k et $X_k = 0$ sinon. Déterminer la loi de X_k.
   (c) Écrire S en fonction des X_k. En déduire $\mathbb{E}(S)$.
   (d) Les X_k sont-elles indépendantes ? Que vaut $cov(X_i, X_j)$?
2. On suppose que N est une variable aléatoire uniforme sur $[\![0,n]\!]$.
   (a) Déterminer $\mathbb{E}(N)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X_k = 1 | N = j)$ et en déduire la loi de X_k.
   (c) Les X_k sont-elles indépendantes ? Que vaut $cov(X_i, X_j)$?