

1 Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$, donner la loi de X , tracer sa fonction de répartition, et calculer son espérance et sa variance.

1. X_1 = le nombre de Pile obtenus en lançant 2 pièces équilibrées.
2. X_2 = le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche lorsque l'on tire sans remise des boules dans une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches
3. X_3 = le produit de 3 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

2 Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points et celui d'une dame 1 point. Du paquet, on tire simultanément et au hasard 2 cartes. On désigne par X la variable égale au total des points marqués.

Déterminer la loi de X , son espérance et son écart-type.

3 On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne plus que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

4 On effectue des lancers d'une pièce équilibrée. On note X le nombre de lancers de pièces nécessaires pour obtenir Pile pour la première fois (on admet que presque-sûrement on obtient au moins un Pile). Déterminer la loi de X , son espérance, sa variance.

5 Soit n un entier strictement supérieur à 3. On considère n personnes qui jouent à « Pile » ou « Face » avec une pièce équilibrée et de façon indépendante.

1. Soit A l' v nement : « une seule personne exactement obtient un résultat diff rent des $(n-1)$ autres personnes ». Calculer la probabilité de A .
2. Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée « partie ») jusqu'à la réalisation de A . On note X la variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon.
Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

6 On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces. On jette un premier d  et on note sa valeur. On jette ensuite le deuxième d  jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier.

Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième d  pour qu'il indique le même numéro que le premier.

Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

7 On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , avec $n \geq 2$.

Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage à l'issue duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Déterminer $N(\Omega)$.
2. Pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(N > k)$. En déduire la loi de N .

8 Soit $p \in]0, 1[$ et soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{p}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Déterminer la loi de $Y = X^2$, son espérance et sa variance.

9 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$.

10 Soit X une variable telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.

2. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge. En déduire que, en cas d'existence,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

11 Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On tire des boules de la façon suivante : si la boule est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule noire ; si la boule est noire, le jeu s'arrête et on note X le nombre de tirages qui ont été effectués.

Dans le cas où on obtiendrait jamais la boule noire, on note $X = 0$.

1. Déterminer la loi de X .

2. Montrer que la variable $X + 1$ admet une espérance et donner sa valeur. En déduire l'espérance de X .

12 On lance simultanément deux dés équilibrés A et B . Le dé A porte le nombre « 1 » sur 4 faces et « -2 » sur les deux autres. Le dé B porte les nombres $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

1. On note X le résultat de A , Y le résultat de B , et $S = |X + Y|$. Déterminer la loi de X et de Y .

2. Déterminer la loi de S puis la loi du couple (X, S) . X et S sont-elles indépendantes ?

13 On lance une pièce équilibrée deux fois de suite.

On note X (respectivement Y) le nombre de Pile obtenu au 1er (resp. 2ème) tirage.

1. Déterminer les lois de $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

2. Déterminer la loi de (S, D) et calculer $\text{cov}(S, D)$.

3. S et D sont-elles indépendantes ?

14 On considère deux urnes A et B et 4 boules : deux blanches et deux noires.

On choisit au hasard deux boules que l'on place dans l'urne A , les deux autres étant alors placées dans l'urne B . On effectue ensuite une suite de tirages de la façon suivante : à chaque tirage, on extrait au hasard une boule de chaque urne, puis on les remet après les avoir échangées.

On note X_0 le nombre de boules noires initialement dans l'urne A et pour tout $n \geq 1$, X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne A à l'issue de n tirages (dont juste avant le tirage suivant).

On note, pour tout entier $n \geq 0$: $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$.

1. Déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$: $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$.

2. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer PQ . En déduire que P est inversible et préciser P^{-1} . Calculer $P^{-1}MP$. En déduire X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que les trois suites $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ et $(r_n)_n$ sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.