

## 1 Calcul de développements limités

**1** Déterminer les développements limités d'ordre 2 des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$1. f(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

$$2. f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$$

$$3. f(x) = 3^{x-1}$$

$$4. f(x) = e^{e^x}$$

$$5. f(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+x})$$

$$6. f(x) = (1+x)^x$$

$$7. f(x) = (1+x)^{1/x}$$

$$8. f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$$

**2** Déterminer les développements limités d'ordre 3 des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$1. f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$2. f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

$$3. f(x) = (1+x)^x$$

$$4. f(x) = e^{\cos(2x)}$$

$$5. f(x) = e^{1+x}$$

$$6. f(x) = \frac{x \ln(1+x)}{\cos(x)}$$

$$7. f(x) = \sqrt{1+3\cos(4x)}$$

$$8. f(x) = \ln(2+\sin(2x)).$$

$$9. f(x) = \sqrt{3+\sqrt{1+8x^2}}$$

$$10. f(x) = \text{Arctan}(e^{2x}-1).$$

**3** Calculer les limites suivantes:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln(x)}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{1 - \cos(x)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) + 1 - e^x}{\sin(x) - x}.$$

## 2 Études de fonctions

**4** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

1. Rappeler le DL d'ordre 2 de  $\ln(1+u)$  au voisinage de 0.

2. Démontrer que  $f$  est continue et dérivable en 0, et préciser  $f'(0)$ .

**5** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{1-e^{-t}} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ .

1. Démontrer que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

2. Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et déterminer  $f'(t)$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ .

3. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  vers  $[1, +\infty[$ .

**6** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que  $f$  est continue en 0, et étudier la dérivabilité en 0.
2. Démontrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\ln(x) \leq x + 1$ . En déduire les variations de  $f$ .
3. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ , puis un équivalent de  $f(x) - x$  en  $+\infty$ .
4. Démontrer que  $f$  admet un développement limité en 1 d'ordre 2 et le déterminer.

**7** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de  $f$  en 0.
3. Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et préciser  $f'(0)$ .
4. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .
5. Étudier les variations de  $f$  et ses limites et tracer son tableau de variations complet.

**8** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .
2. Montrer que  $f'$  n'est pas dérivable en 0. Montrer que  $f$  admet cependant un DL d'ordre 2 en 0.

**9** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = \frac{2^x - x^2}{x - 2}$$

1. Montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité en 2, et étudier la dérivabilité de ce prolongement en 2.
2. Déterminer la position du graphe de  $f$  par rapport à la tangente au point d'abscisse 2.

**10** Montrer que la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**11** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$$

1. Donner le DL d'ordre 2 de  $f$  en 0. En déduire l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en 0 et leurs positions relatives au voisinage de 0.
2. Montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ , on a  $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
En déduire que  $f$  admet une asymptote et préciser la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à cette asymptote.