1 Calcul de sommes infinies

$\boxed{1}$ Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

$\boxed{2}$ Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n n!}$.
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2^n}{n!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3}{5^n}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n!}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+3n}{2^n}$

$\boxed{3}$ On admet que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Calculer les sommes suivantes, après avoir justifié leur convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$\boxed{4}$ Soit x un réel fixé. On note $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $B = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Justifier que A et B existent.
2. Calculer $A+B$ et $A-B$. En déduire les valeurs de A et B.

2 Convergence de séries

$\boxed{5}$ Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $\exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
3. $2^{2n-1}e^{-n}$
4. $\dfrac{1}{n^2}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
5. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$
6. $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$
7. $\ln\left(\dfrac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right)$
8. $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
9. $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$
10. $\left(e^{1/n}-1\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

On rappelle qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1+x) \underset{x\to+0}{\sim} x$, $e^x - 1 \underset{x\to+0}{\sim} x$.

3 Comparaison somme/intégrale

6

1. Pour tout $k \geqslant 1$, montrer que :

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \frac{1}{k^2}$$

2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t^2} dt + 1$$

Conclure que la série de terme général $1/k^2$ est convergente, et donner un encadrement de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

7

1. (a) Pour tout $k \geqslant 2$, montrer que :

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)} dt \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$$

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, et déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

2. Montrer, en utilisant une méthode analogue de comparaison somme/intégrale, que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ converge.

8 À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$$

9 À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que pour tout réel $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

4 Suites et séries

10 Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 0$, $a_2 = 4/9$ et :

$$\forall n \geqslant 1,\ a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$$

Montrer que la série de terme général a_n converge, et vérifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$$

11 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que (u_n) converge vers une limite à déterminer.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

12 Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.

13 Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

14 Soit α un réel et n un entier naturel non nul. On considère l'équation suivante :

$$x^n + n^\alpha x - 1 = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une unique racine positive, qu'on note x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $\alpha \geqslant 0$.
3. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum x_n, \qquad \sum \ln(x_n), \qquad \sum \ln(1 + x_n^\beta) \quad (\text{avec } \beta \in \mathbb{R}), \qquad \sum \left(x_n - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

5 Étude de séries

15 Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

1. Montrer que (u_n) décroît à partir du rang 3.
2. Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n,\ \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right),\ \sum_{n\geqslant 1} e^{u_n}\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{1+u_n},\ \sum_{n\geqslant 1} u_n^2,\ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$$

16

1. Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt = \int_0^{1/2} \left(\frac{t^n-1}{1-t} + \frac{1}{1-t}\right) dt$$

2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} + \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt.$$

3. Conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,2^n}$ converge et que sa somme vaut $\ln(2)$.

17 Pour tout $n \geqslant 1$ et tout réel $x > 0$, on note : $v_n(x) = \dfrac{1-\exp(-nx)}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la série de terme général $v_n(x)$ converge. Dans la suite de l'exercice, on note

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

2. En admettant que pour tout réel $y \in]-1, 1[$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$$

montrer que

$$f(x) = (1-\exp(x))\ln(1-\exp(-x))$$

18 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

2. En utilisant que $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1} dt$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ en fonction de I_n.

   En déduire la convergence de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.