1 Suites usuelles et explicites

1 Calculer le terme général des suites (u_n) suivantes :

1. $u_0 = 5$, $u_1 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$
2. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.
4. $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$.

2 Soit M la matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ contenant uniquement des 1, sauf des 0 sur la diagonale.

1. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, M^k = \alpha_k M + \beta_k I$ où (α_k) est récurrente linéaire double et où $\beta_k = (n-1)\alpha_k$.

3 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & u_n+1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que (u_n) est arithmético-géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4 Calculer les limites suivantes, en utilisant éventuellement les DL usuels en 0 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+2} - n)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-3) \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+n^2)^{1/n}$
9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln(n) + 5}$
10. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

5 Déterminer un équivalent simple des suites suivantes, en utilisant éventuellement les DL usuels en 0 :

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $w_n = \ln(1+n^3)$
4. $x_n = \dfrac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+1}$
5. $y_n = \dbinom{n}{k}$ (pour k fixé).
6. $z_n = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{n^2}\right) \ln\left(\cos \dfrac{1}{n}\right)}{\left(e^{1/n} - e^{-1/n}\right)\left(\left(\dfrac{1}{n}+1\right)^5 - 1\right)}$.

6 1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{2^{n-1}}{n!} \leqslant 1$.

2. On note : $\forall n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. Montrer que (S_n) converge vers un réel ℓ tel que $2 < \ell \leqslant 3$.

7 Soit (S_n) la suite définie par : $\forall n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Qu'en déduire sur (S_n) ?

8 On note pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la limite de (S_n).
3. On pose $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (T_n) converge. En déduire un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$.

9 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

On suppose que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. Montrer que si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$
2. Montrer que si $v_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.

2 Suites récurrentes définies par une fonction continue

10 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

11 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

12 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

13 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
2. Etudier la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{4 + 3x}$ sur $[0, +\infty[$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4|$
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 3$
5. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

14 Soit (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{2+u_n}$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

15 Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \geqslant 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$
2. La suite (u_n) est-elle monotone ?
3. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) diverge.

16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.
Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que la proposition $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n \geqslant 0$" est vraie.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   On note α la solution positive. Montrer que $\alpha \leqslant 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
5. La suite (u_n) converge-t-elle ?

17 1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(x+1) - x$. En déduire le signe de f.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$. La suite (u_n) est-elle monotone ? convergente ? si oui, préciser sa limite.

18 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 1 - x^2$.

1. Montrer que $[0,1]$ est stable par f. En déduire que si $u_0 \in I$, la suite (u_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ pouvant être limite de la suite (u_n).
3. On suppose $u_0 \in]0, \alpha[$.
   (a) Étudier le signe de $f \circ f(x) - x$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier la monotonie de (v_n). Quelle est sa limite ? La suite (u_n) converge-t-elle ?

19 Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2\sqrt{n}$.
2. Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
3. Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$
4. Montrer que : $u_n - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$
5. Montrer que : $u_n - \sqrt{n} - \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8\sqrt{n}}$

20 Soit la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \dfrac{t_n}{1 + nt_n^2}$.

1. Etudier la monotonie de la suite (t_n).
2. Montrer que (t_n) converge et déterminer sa limite.

3 Suites implicites

$\boxed{\mathbf{21}}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Montrer que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera u_n.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
5. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

$\boxed{\mathbf{22}}$ Soit pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0,\ f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$, qui appartient à $]0, 1]$. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que (x_n) est décroissante.
3. En déduire que (x_n) converge vers 0.
4. Montrer que pour $n \geqslant 3$, $x_n > \dfrac{1}{n}$.
5. Etudier le signe de $x - \ln(x)$ et en déduire que $x_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ Pour $n \geqslant 3$ et $x \in [0, n]$, on note : $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

1. (a) Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0, n]$.
   (b) En déduire que l'équation $x^n = e^x$ a une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 3, u_n > 1$.
3. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose : $v_n = u_n - 1$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

$\boxed{\mathbf{24}}$ Pour un entier $n \geqslant 3$, on pose $f_n(x) = x - n\ln(x)$ pour $x > 0$.

1. Dresser le tableau de variations de f_n et esquisser son graphe.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note u_n la plus petite solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que (u_n) est décroissante, et converge vers 1.
4. On pose $u_n = 1 + v_n$. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

$\boxed{\mathbf{25}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \longmapsto -1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique x_n dans $]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
   (b) Montrer que $1 + \ln(1 - x_n) + \displaystyle\int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}\, dt = 0$.
   En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.